Attitude des ménages face au risque

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - 2011

Plan du cours

1. Introduction : demande de couverture et comportements induits pa

2. Représentations du risque

3. Evaluations du risque

4. Exemples et exercices

1

Introduction : demande de couverture et comportements induits par le risque

Accident et couverture

L’idée de couverture apparaît très tôt dans l’histoire de l’humanité. On la trouve en particulier dans les contrats d’assurance génois :

- Un capitaine finance son expédition par un emprunt couvert par l’assurance (sur le bateau et sur le chargement)

- si le bateau n’atteint pas sa destination, l’emprunt concerné n’est pas à rembourser.

Précautions contre un futur incertain

Keynes dans son ouvrage “The General Theory of Employment, Interest, and Money” introduit un motif de précaution pour justifier l’épargne

> *People save to protect against future risk and uncertainty*

- Il ne s’agit pas d’éliminer le risque futur ni la source du risque.
- il s’agit d’adoucir demain les possibles conséquences d’un risque (en acceptant de diminuer la richesse d’aujourdhui)

Choix humains et exposition au risque

Dans une vision moderne des choix humains, on ne dissocie pas les choix des risques induits. On trouve en filigrane une théorie du comportement humain chez François Ewald, entièrement marquée par la gestion des risques :

> ***[L’homme émancipé]*** *l’usage de sa liberté l’expose à mille accidents. Il ne s’affranchit que sous la condition de se conduire avec sagesse, de redoubler d’efforts et d’affronter des obstacles. En travaillant, il se blesse ; en naviguant, il s’expose aux naugrages ; en agissant il entre dans une lutte contre une foule d’obstacles, agir c’est vaincre . . .*

Analyse positive : rôle clé des probabilités

François Ewald voit dans le développement des probabilités la clé d’une analyse positive du comportement humain et de l’environnement dans lequel les choix se développent.

> *Le calcul des probabilités permettait d’articuler sur des démonstrations positives que les libertés laissées à elles-même, sans direction extérieure, n’en obéissaient pas moins à des lois. Le nouveau calcul attestait qu’un gouvernement par la liberté n’impliquait pas nécessairement désordre, qu’il était même le seul naturel.*

Une des directions ouvertes par cette analyse est que l’homme, par sa gestion des risque peut aussi influencer les probabilités.

- La chance n’est plus seulement dans le domaine d’une volonté divine,
- Elle est aussi le fruit de la gestion (individuelle et collective) des risques.

2

Représentations du risque

- distributions discrètes et continues
- Statistiques sur les distributions

Trois niveaux de risque

A la suite de Frank Knight, on peut distinguer trois degrés dans la connaissance imparfaite d'un agent soumis à l'alea :

1. l'incertain
2. le risque
3. l'expertise.

L’incertitude

On dira un agent dans l’incertitude en l’absence de toute connaissance positive d’une distribution de l’alea. Il connaît les différents états de la nature, mais ne peut y associer de probabilité. A ce stade, les opportunités d’échange mutuellement avantageuses sont limitées et la rationalité qui les supporte, rudimentaire.

Le risque

Au second degré, la connaissance d'une distribution permet à l'agent de se représenter le risque auquel il est soumis par des indicateurs comme la moyenne ou la variance d'un choc et d'établir des échelles de comparaison avec d'autres risques associés aux mêmes états de la nature. Ceci est le point de départ de la théorie de l'assurance.

L’expertise

Enfin, il est possible que d’autres agents aient une connaissance plus fine du vrai état de la nature (mais possiblement imparfaite). C’est alors que le cadre économique peut intégrer, par un mécanisme d’échange élaboré, une réduction de cette asymétrie de l’information.

Probabilités et distributions

- Cardan (1501-1576) : « le joueur savant ».

- Probabilité d'un événement = $\sharp$ résultats favorables / $\sharp$ événements possibles.

- « Pile » a une probabilité de 1/2.
  Probabilité[obtenir un six en moins de 4 lancés] >1/2 ?
  $= 1 - (5/6)^4 = 0,5177$ (de Méré).

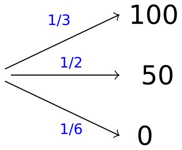
  Remarque : Probabilité[obtenir un six en moins de 2 lancés]
  =1-Probabilité[pas de six en 2 lancés] $= 1 - (5/6)^2 = 11/36 = 0,3056$.

Distributions du risque

Distributions discrètes

Il y a un nombre fini d'évènements possibles $i \in \mathscr{I}$, chacun avec probabilité p_i. Cette association à chaque évènement de sa probabilité, c'est ce qu'on appelle la **distribution** des risque. Cette distribution satisfait toujours la contrainte

$$\sum_{i \in \mathscr{I}} p_i = 1$$



Distributions continues

Il y a un nombre infini, voire continu d'évènements possibles : chacun, pris isolément apparaît avec une probabilité nulle. La fonction de **repartition** décrit le poids relatif des évènements de faible gain par rapport aux évènements de gains plus élevés.

$$F(x) = Prob(X \leq x)$$

Fonctions de répartition

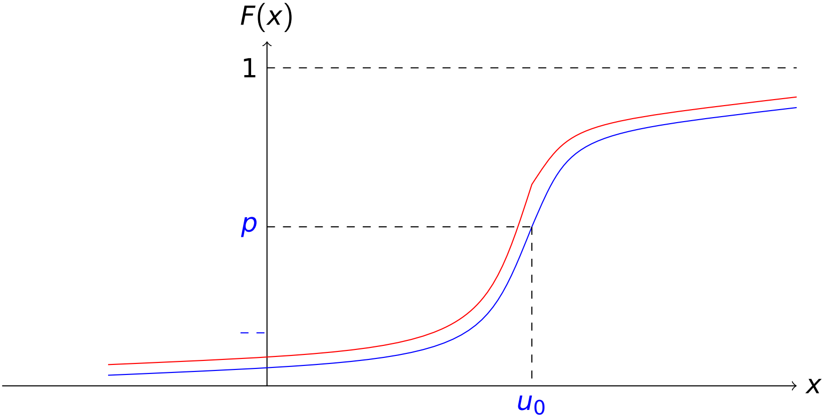


Figure : deux fonctions de répartitions : F et G

Statistiques

- **Moyenne** $\sum_i$ probabilités * richesses
  dans l'exemple précédent, moyenne=50
- **Variance** une mesure de la distance à la moyenne.
  exemple : la distribution $\mathscr{A}$ a une plus grande variance que la distribution $\mathscr{B}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & 75 & & & 100 \\ {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & & & {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & 25 & & & 0 \end{tikzcd}$$

$$VAR(\mathscr{B}) \leq VAR(\mathscr{A})$$

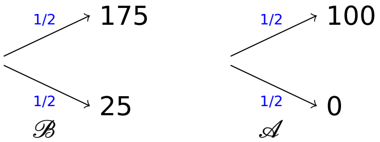
- **Modes** représente le/les évènements avec la plus grande probabilié
- **Fractiles** Divise la population en classes égales, représentées par une richesse pivot.

3

Evaluations du risque

Comparaisons - FSD

Certaines comparaisons admises par tous sont *robustes*. Ainsi, on préfèrera la loterie $\mathscr{B}$ à la loterie $\mathscr{A}$ si l'utilité des agents est croissante avec la richesse dans chaque état de la nature.



Définition : On dira qu'une distribution domine une autre distribution suivant le critère de *dominance stochastique de premier ordre* si cette distribution rémunère plus tous les états de la nature.

cependant, ce critère est loin de permettre de classer toutes les loteries. Ainsi, il sera implossible d'établir suivant ce critère un ordre de préférence entre la loterie $\mathscr{B}$ et le revenu certain

Comparaisons FSD (exemple)

Montrer que l'on préfèrera la loterie $\mathscr{B}$ à la loterie $\mathscr{A}$ suivante, selon le critère FSD

$$\underset{\mathscr{B}}{\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{2/3} 100 \\ \xrightarrow{1/6} \ 50 \\ \xrightarrow{1/6} 25 \end{array}\right.} \qquad \underset{\mathscr{A}}{\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{5/6} 100 \\ \xrightarrow{1/12} \ 50 \\ \xrightarrow{1/12} 25 \end{array}\right.}$$

On prendra grand soin à une argumentation *précise*

Recherche d’un Critère de préférence

Pour comprendre le comportement d’un agent, et plus précisément les choix qu’il fait lorsqu’il doit choisir entre plusieurs loteries $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, on essaye d’établir une *notation* des différentes loteries.

Quels sont les critères *acceptables* de notation des loteries ?

Critère Moyenne - Variance

- Critère lexicographique
- Une plus grande espérance de revenu satisfait l'agent
- Une moins grande variance de revenu satisfait l'agent

$$U(X) = E(X) - \frac{\beta}{\alpha} V(X)$$

Espérance d'utilité

Définition

Plutôt que de prendre l'espérance de la lotterie, tout se passe comme si l'agent appréciait les différents revenus à travers un filtre. Ainsi, l'agent voit le revenu x à travers son utilité ressentie $u(x)$. *Son critère d'évaluation est l'espérance de ces utilités.*

$$U\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array}\right) = \frac{1}{3}\, u(x) + \frac{1}{2}\, u(y) + \frac{1}{6}\, u(z)$$

Utilité marginale décroissante pour la richesse

En général, on estime que la fonction $u(x)$ Von Neumann Morgerstern est concave.

Cette fonction d'utilité VNM permet de représenter ce que l'on observe souvent à travers les choix des agents, à savoir *l'utilité marginale décroissante pour la richesse*

x	$u(x) = \sqrt{x}$	$u(x) = \ln(x)$
100	10	2,30
1000	31,63	4,60
10.000	100	6,91
100.000	316,23	9,21
10^6	1000	11,51

Un accroissement de richesse génère un accroissement d'utilité qui est en relation inverse de la richesse déjà accumulée.

Equivalent certain

Définition On appelle équivalent certain d'une loterie, la loterie certaine qui donne à un ménage autant de satisfaction que cette loterie.

L'équivalent certain est par excellence une mesure *subjective* des préférences de l'agent.

Exercice Calculer l'équivalent certain de la loterie qui donne 100 avec proba 1/2 et 0 sinon, lorsque $u(x) = \sqrt{x}$.

Aversion pour le risque et Equivalent certain

Définition Un agent est *averse au risque* dès lors que pour lui l'équivalent de n'importe quelle loterie est toujours inférieur ou égal à la moyenne de cette loterie.

Dans l'exemple précédent, on comparera 25 et 50.

Théorème Si un agent vérifie le critère de l'espérance d'utilité, alors il est averse au risque si et seulement si sa fonction d'utilité VNM est concave.

Exercice

En supposant que la VNM d'un agent est $u(x) = \sqrt{x}$, montrer directement, sans appliquer le théorème précédent que

$$U\left(\begin{tikzcd} & x \\ {} \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & y \end{tikzcd}\right) \geq u\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

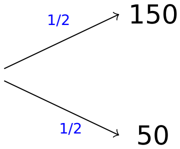
Prime pour le risque

La fonction d'utilité VNM permet en particulier de mesurer ce que l'agent est prêt à payer pour échapper au risque, cad, ce que l'on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

$$\pi = E(L) - EC$$

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la lotterie



- Sa richesse espérée est 100
- Son utilité est $\frac{1}{2}\, ln(150) + \frac{1}{2}\, ln(50) = 4,661$
- Or $4,661 = \ln(76,6)$
- Sa prime de risque est donc $100 - 76,6 = 13,4$.

Mesure de l'Aversion pour le risque

Hétérogénéité de l'attitude face au risque, chez les animaux et chez l 'espèce humaine.
La prime de risque mesure votre degré d'aversion pour le risque. = refus des loteries d'espérance nulle.

L'aversion pour le risque est en rapport avec le degré de concavité de u. Elle peut être mesuré par ces différents coefficients :

- **Coefficient absolu d'aversion pour le risque :** $R_a(x) = -u(x)''/u'(x)$
- **Coefficient relatif d'aversion pour le risque :** $R_r(x) = -xu(x)''/u'(x)$

Approximation d'Arrow-Pratt

Dans le cas où le risque est petit, cad $c = w + \varepsilon$ avec ε petit, le coefficient d'Arrow-Pratt permet d'approximer la prime de risque, de la manière suivante.

Proposition Pour un petit risque, la prime de risque est approximativement égale à

$$\rho = \frac{1}{2} R_a(w) E_w[\varepsilon^2]$$

- Plus le second moment $E_w[\varepsilon^2]$ est élevé, plus la prime de risque est élevée
- Plus $R_a(w)$ est élevé, plus la prime de risque est élevée

Exemples

Soit un individu qui dispose de 10.000 euros et dont la VNM est $\sqrt{x}$. Quel est pour lui la valeur d'un ticket de loterie qui lui donne 1 euro avec probe 1/2 et 0 sinon.

réponse
$u'(w) = 1/2\sqrt{w}$
$u''(w) = -1/4w\sqrt{w}$
$R_a(w) = 1/2w$
$E_w[\varepsilon^2] = \frac{1}{2} * 1^2 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{1}{2}$
$\rho = 1/4 * 10.000$, cad presque rien.
Quand on a dix mille euros, la prime de risque qu'on est prêt à payer pour se débarrasser de la loterie est presque nulle.
Donc, l'équivalent certain de cette loterie est 50 cts.
La valeur du ticket de loterie est 50 centimes.

Comparaison d'aversion pour le risque

Définition On dit qu'un agents A est plus averse au risque qu'un agent B si pour toute loterie, l'équivalent certain de cette loterie pour l'agent A est inférieur à l'équivalent certain de cette loterie pour l'agent B.

En supposant que deux agents A et B vérifient le critère d'espérance d'utilité, la proposition suivante développe trois conditions identiques qui caractérisent la propriété A plus averse au risque que B.

Théorème En supposant que deux agents A et B vérifient le critère d'espérance d'utilité, il est équivalent de dire que

- A plus averse au risque que B
- u^A est une transformation convexe de u^B
- pour tout x, on a $R_a^A(x) \geq R_a^B(x)$

Exemple

En supposant qu'un agent de type γ (pour $\gamma \in (0,1)$) vérifie le critère de l'espérance d'utilité avec la fonction VNM $u_\gamma(x) = x^\gamma$, montrer que l'équivalent certain de la loterie qui donne 100 avec probabilité 1/2 et 0 avec probabilité 1/2 est croissant avec γ. Calculer la limite de cet équivalent certain. Les résultats que vous trouvez étaient-ils prévisibles ?

Comparer l'aversion pour le risque de divers agents dont la VNM est $u(x) = \ln(x)$, $u(x) = \sqrt{(}x)$, $u(x) = -\exp(-x)$.

Résolution de l'exemple

- l'équivalent certain de l'agent de type γ est r qui vérifie

$$r^\gamma = \frac{1}{2}(100)^\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{100}{2^{(1/\gamma)}} = 100exp(-\ln(2)/\gamma)$$

Quand γ augmente, $-\ln(2)/\gamma$ augmente, ainsi que l'équivalent certain. La limite est $100exp(-\ln(2)) = 100/2 = 50$, cad l'équivalent certain de l'agent neutre au risque (paramètre $\gamma = 1$).

- Un autre moyen de voir que lorsque γ augmente, l'aversion pour le risque diminue est de calculer le coefficient Arrow-Pratt de l'agent de type γ :

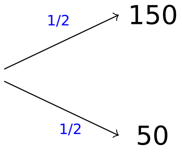
$$u'_\gamma(x) = \gamma\frac{u_\gamma(x)}{x} \quad u''_\gamma(x) = \gamma(\gamma-1)\frac{u_\gamma(x)}{x^2} \quad R_a^\gamma(x) = \frac{1-\gamma}{x}$$

où l'on vérifie que le coefficient Arrow-Pratt est croissant avec γ.

Aversion décroissante avec la richesse

Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit $u(x) = \ln(x)$ et que cet agent soit exposé à la loterie



Comment votre prime de risque évolue si votre richesse initiale est de 1000 ?

Comment votre prime de risque liée au risque de gagner ou perdre 50 avec égales probabilités évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

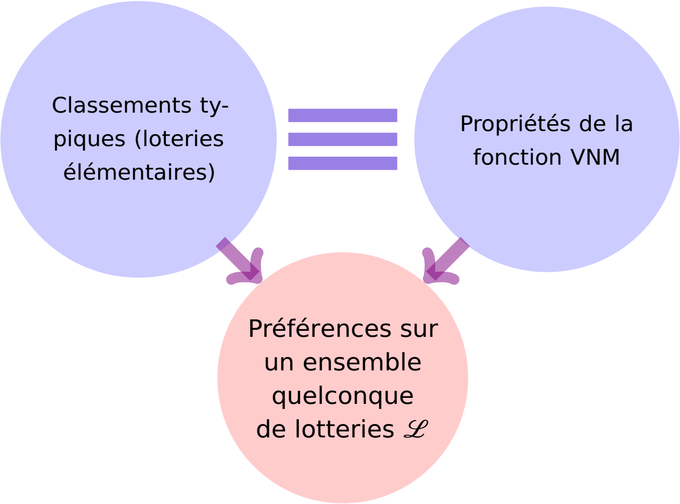
Il est communément accepté que celle-ci décroît.

Pour aller plus loin dans l’analyse …

Préférences pour l'incertain, caractéristiques comporte

Comprendre le comportement de l'investisseur = connaissance des préférences de l'investisseur sur l'ensemble des lotteries.

Indispensable quand le seul critère du rendement est insuffisant.



Classement intuitif de loteries - Basiques

Lorsqu'on réfléchit aux propriétés des préférences, on commence par ces deux propriétés qu'on supposera vérifiées dans le cas standards

0. qu'un revenu certain supérieur est préféré à un revenu certain inférieur

1. qu'un agent préfère l'espérance d'un bruit blanc plutôt que le bruit blanc

$$\longrightarrow x \qquad \longrightarrow x\text{-}k$$

$$\mathscr{B}_0 \quad \succeq \quad \mathscr{A}_0$$

$$\longrightarrow x \qquad x \begin{cases} \xrightarrow{1/2} x+\varepsilon \\ \xrightarrow{1/2} x-\varepsilon \end{cases}$$

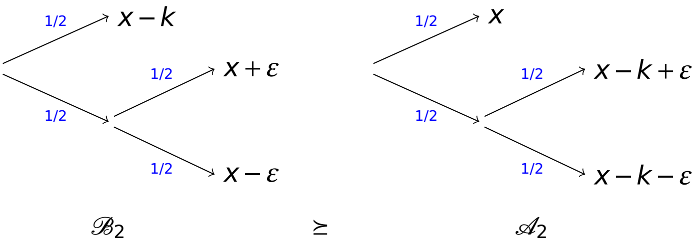
$$\mathscr{B}_1 \quad \succeq \quad \mathscr{A}_1$$

Aime pas $\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$, cad moins de richesse

préfs monotones

Classement intuitif de loteries - Prudence

2. En poursuivant l'analyse des propriétés des préférences qu'on prête aux préférences standard, on considérera la prudence, c'est-à-dire la préférence pour une désagrégation d'une perte certaine et d'un spread de moyenne nulle.

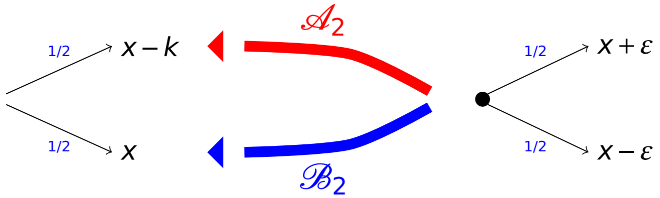


Aime pas $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$, cad additionner les dégradations dans le même état de la nature

Prudence

Prudence (suite)

On peut comprendre la prudence dans un environnement temporel (ou spatial) : tout se passe comme s'il y avait une loterie à $t = 0$ avec la perte de $-k$ dans un état de la nature, et que l'on se demande, à $t = 1$, dans quel état de la nature on préfèrerait rajouter un spread au cas où on soit dans la position de choisir uniquement dans quel état de la nature on met le spread.

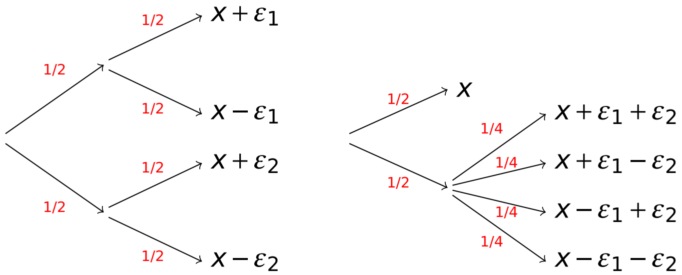


Remarques : (à prouver)

- $\Rightarrow$ Mieux disposé à accepter un risque supplémentaire $\Longleftrightarrow$ plus riche
- $\Rightarrow$ l'épargne de précaution augmente $\Longleftrightarrow$ plus riche

Classement intuitif de loteries - Tempérance

3. La tempérance est une préférence pour la désagrégation de deux spread à moyenne nulle.



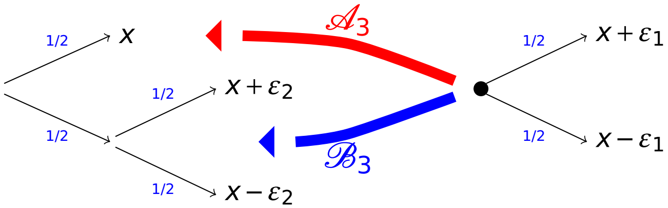
$$\mathscr{B}_3 \succeq \mathscr{A}_3$$

Aime pas $\mathscr{B}\to\mathscr{A}$, cad additionner les dégradations dans le même état de la nature

Prudence

Tempérance (suite)

On peut comprendre la tempérance dans un environnement temporel (ou spatial) : tout se passe comme s'il y avait une loterie à $t = 0$ avec un spread à somme nulle dans un état de la nature, et que l'on se demande, à $t = 1$, dans quel état de la nature on préfèrerait rajouter un autre spread à somme nulle, *indépendant*, au cas où on soit dans la position de choisir dans quel état de la nature on met ce nouveau spread.



Remarque :

⇒ On aime moins le premier bruit $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ en présence de $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$