

# Valorisation par arbitrage

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - 2011

# Plan du cours

Introduction : l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage

1. Synthèse des actifs par un système de zéro-coupons
2. VAN et TRI

# Actifs financiers

On appelle actif financier un vecteur de flux de revenu dans chacune des dates  $1, 2, \dots, T$ . Exemple :  $V^j = (V_1^j, \dots, V_T^j)$ .

On appelle prix d'un actif financier, la valeur à laquelle cet actif s'échange à la date  $t = 0$ .

On suppose dans ce chapitre qu'il n'y a pas d'incertain, que le prix à l'achat et à la vente de l'actif est identique, et qu'enfin, il est possible de faire des ventes à découvert.

# Absence d'opportunité d'arbitrage

- On dit qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage s'il n'existe pas de stratégie financière qui assure un payoff positif à toutes les périodes.
- ▶ Autrement dit, s'il est possible d'acheter et de vendre à découvert, il n'y a absence d'opportunité d'arbitrage si pour tout actif, il est impossible de trouver une combinaison d'actif qui réplique exactement les payoffs de cet actif, dont la valeur de marché serait différente du prix de l'actif initial

# Marché complet et actifs de référence

- On dit qu'un marché est complet lorsque pour tout actif, il existe une combinaison d'actifs échangés sur le marché qui réplique cet actif.
- On dit qu'un ensemble d'actifs est de référence, si tous les actifs peuvent être répliqués par ces actifs de référence.

# Valorisation par arbitrage

- ▶ Lorsque *la condition de non arbitrage* est satisfaite et lorsque *les marchés sont complets*, on peut valoriser tout actif sur le marché financier à partir du prix de ces actifs de référence.

le prix d'un actif est la combinaison linéaire des prix des actifs qu'il faut combiner pour répliquer cet actif

1.

Synthèse des actifs intertemporels  
par différents systèmes complets d'actifs

les actifs zéro coupons  
les taux d'intérêt

# Marché complet et zéro coupons

## Définition

On appelle zéro coupon d'échéance  $t$  une obligation ne livrant du numéraire qu'en  $t$  ; par convention, le revenu versé est d'une unité de numéraire :

$$V_t = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{période } t}, 0, \dots, 0)$$

- ▶ Le marché financier intertemporel est complet si tous les zéro coupons sont disponibles.
- ▶ Si tous les zéros coupons ont à  $t = 0$  un prix (que l'on note  $\beta_t$ ), alors, on peut valoriser l'actif  $V = (V_1, V_2, \dots, V_T)$  ainsi :

$$p(V) = \sum_{t=1}^T \beta_t V_t$$

# Caractéristiques des systèmes complets d'actifs

Dans un modèle à  $T$  périodes ( $T+1$  dates) et un bien par date, il est nécessaire d'avoir au moins  $T$  actifs financiers pour que le marché soit complet.

On dit que ce système d'actif est indépendant s'il est impossible d'écrire aucun d'entre eux comme une combinaison linéaire des autres actifs.

Tout système complet et indépendant d'actif, dans un modèle à  $T$  périodes ( $T+1$  dates) et un bien par date comprend exactement  $T$  actifs.

# Multiplicité des systèmes complets d'actifs

Trois actifs bien choisis forment un marché complet dès qu'ils sont indépendants. Mais l'indépendance est essentielle.

- Soient les actifs  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (2, 1, 0)$  et  $C = (3, 2, 1)$ , dire pourquoi ce n'est pas un système complet d'actifs.

Même exercice pour  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 1, 0)$  et  $C = (0, 0, 2)$

- Démontrer qu'au contraire, les trois actifs  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 1, 0)$  et  $C = (0, 2, 2)$  sont indépendants.

Même exercice pour les trois actifs  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (1, 1, 0)$  et  $C = (0, 0, 1r)$

- ▶ Remarquez que dans tous les cas, l'indépendance est indépendante du prix de ces trois actifs,  $p^A$ ,  $p^B$  et  $p^C$ .

Dans les deux derniers cas, donner les prix des zéros coupons.

# Système complet de taux d'intérêt spots

## Proposition

Lorsqu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage, et s'il existe un taux d'intérêt pour l'ensemble des périodes, alors, le marché est complet : tout actif a une valeur de marché qui est exactement la valeur actualisée à la période 0 de l'ensemble des flux composant cet actif.

$$\beta_1 = \frac{1}{1+r_1} \quad \beta_2 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \quad \dots$$

Dans un modèle à trois périodes,  $T = 0, 1, 2, 3$ , les taux d'intérêt spots sont  $r_1 = 10\%$ ,  $r_2 = 5\%$  et  $r_3 = 10\%$ . Donner les prix des zéros coupons  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$ .

Refaire le même exercice quand  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ .

# Obligation

## **Définition**

Une obligation est un titre d'emprunt sur un nombre défini de périodes qui prévoit le remboursement de l'intérêt à la fin de chaque période, et le remboursement de l'intérêt et du capital à l'échéance de l'emprunt.

Une obligation est caractérisée par le taux d'intérêt annuel, supposé unique, et par son terme.

## Exemple de structure des taux de zéro coupons dérivés d'obligations

On considère une économie d'échange comprenant quatre dates  $t = 0, 1, 2, 3$ , un unique bien de consommation à chaque période. A la date 0, des marchés financiers sont ouverts sur lesquels sont échangés trois obligations classiques couvrant toutes les échéances. Les taux d'intérêt des obligations (les coupons) sont les suivants

	<u>obligation 1</u>	<u>obligation 2</u>	<u>obligation 3</u>
échéance	t= 1	t= 2	t= 3
intérêt	12,5%	63,63%	67,49%

- 1) développer les caractéristiques de ces obligations (coût et flux de revenu futurs), déterminer la valeur des prix des zéro coupons  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  à partir des taux d'intérêt des obligations.
- 2) dire en quoi les taux d'intérêt s'apparentent-ils à des prix.

## Exercice

On considère une économie d'échange comprenant quatre dates  $t = 0, 1, 2, 3$ , un unique bien de consommation à chaque période. Trois actifs sont disponibles :  $A^1 = (1, 2, 3)$ ,  $A^2 = (3, 2, 1)$ ,  $A^3 = (1, 1, 1)$  dire et démontrer si le marché est complet.

Même exercice pour  $A^1 = (1, 2, 3)$ ,  $A^2 = (3, 2, 0)$ ,  $A^3 = (1, 1, 1)$

2.

VAN et TRI

valeur actualisée *nette* d'un investissement  
Investissement divisibles ou non

# Valeur actuelle et VAN

Pour calculer la valeur actuelle d'un projet, on actualise les revenus futurs anticipés à un taux égal à la *rentabilité offerte par des actifs comparables*.

Le taux d'actualisation, que l'on utilise correspond au renoncement d'une opportunité (soit un placement sur le marché, soit tout autre opportunité que l'on a en parallèle), c'est une exigence de rentabilité qu'on appelle le coût d'opportunité du capital. (on renonce à une opportunité de 7% ...)

- la VAN égale la valeur actuelle d'un projet moins l'investissement initial, nécessaire aujourd'hui pour mettre en place ce projet.
- le coût d'opportunité du capital est le meilleur rendement qu'une unité de capital peut avoir dans le meilleur placement aujourd'hui

# Propriétés de la VAN

- ▶ La VAN est universelle et elle réconcilie les préférences pour consommation immédiate ou une consommation future de plusieurs consommateurs.
- ▶ Le concept de VAN permet de séparer nettement la propriété du capital d'une entreprise de sa gestion

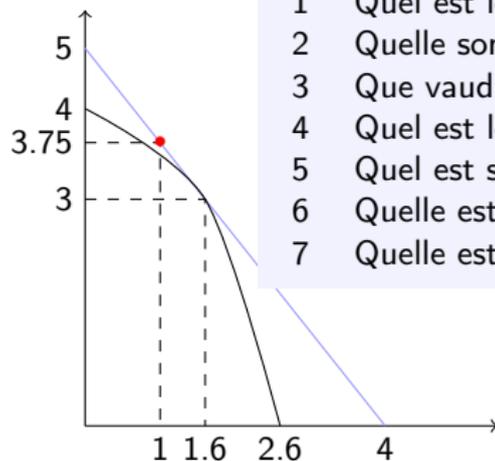
## Exemple de Calcul

Calculer la VAN et le taux de rentabilité des investissements suivants sachant que le coût d'opportunité du capital est de 20% pour les cinq projets

Investissement	Flux initial $C_0$	Flux dans un an $C_1$
1	-10 000	18 000
2	-5000	9 000
3	-5 000	5 700
4	-2000	4 000
5	-10 000	12 000

# Décisions d'investissement et de financement

Dans la figure suivante la droite représente les possibilités d'investissement sur les marchés de capitaux, et la courbe, les possibilités d'investissement en équipement productif. Supposons que le seul actif de l'entreprise consiste en 2,6 millions d'euros d'encaisse. On note enfin d'un point rouge le plan de consommation préféré du décideur.



- 1 Quel est le taux d'intérêt ?
- 2 Quelle somme l'entreprise devrait-elle investir dans le matériel ?
- 3 Que vaudra cet investissement dans un an ?
- 4 Quel est le taux de rentabilité moyen de cet investissement ?
- 5 Quel est son taux de rentabilité marginal ?
- 6 Quelle est la valeur actuelle de cet investissement ?
- 7 Quelle est sa VAN ?

## Différents indicateurs

- ▶ la VAN, cad la somme actualisée de tous les flux futurs
- ▶ le délai de récupération, cad le nombre d'années nécessaires pour que les flux cumulés égalent l'investissement initial.
- ▶ le taux de rentabilité interne, cad le taux qui actualise les différents flux tel que la VAN ainsi calculée est nulle.

## Propriétés de la VAN et du TRI

- ▶ la VAN est additive : si vous calculez la VAN totale sur un ensemble de projets, c'est la somme de la VAN de chacun des projets.
- ▶ le taux de rentabilité interne de l'ensemble de deux projets est compris entre les TRI de chacun des projets qu'il compose.

Le taux d'opportunité du capital est 9%. Imaginez que vous ayez à investir 400 euros. Vous Choisissez le projet *A* ou le projet *B* accompagné du projet *N*, cad placer votre argent à la banque au taux de marché ?

Projet	$C_0$	$C_1$	$C_2$	TRI (en %)
A	-400	250	300	23
B	-200	140	179	36
N	-200	18	218	9

## Délai de récupération de trois projets

Projet	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Délai de récup	VAN à 10%
A	-2 000	500	500	5 000	3	2624
B	-2 000	500	1 800	0	2	-58
C	-2 000	1 800	500	0	2	50

# Taux de rentabilité interne

- ▶ Projets mutuellement exclusifs, le TRI critère insuffisant

Projet	$C_0$	$C_1$	TRI (en %)	VAN à 10%
E	-10 000	20 000	100	8 182
F	-20 000	35 000	75	11 818
F-E	-10 000	15 000	50	3 636

- ▶ Existence de plusieurs TRI

	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	TRI (en %)
Flux avant impôt	-1 000	300	300	300	300	300		
Impôt		500	- 150	-150	- 150	-150	- 150	
Flux nets	-1 000	+800	150	150	150	150	-150	[-50,15,2]

# Taux de rentabilité interne

Icaé Bonize, président de Six Clopes SA doit choisir entre deux les deux investissements possibles suivants. Le coût d'opportunité du capital est de 9%. M. Bonize est tenté par le projet *B* dont le TRI est le plus élevé

Projet	$C_0$	$C_1$	$C_2$	TRI (en %)
A	-400	250	300	23
B	-2 00	140	179	36

- Expliquez-lui pourquoi son critère de choix n'est pas correct.
- Montrez-lui comment adapter le critère du TRI de façon à choisir le meilleur projet
- Montrez-lui que ce projet génère aussi la VAN la plus élevée.

# Indice de profitabilité

$$\text{Indice de profitabilité} \\ I = \frac{\text{VAN}}{\text{Investissement}}$$

Projet	$C_0$	$C_1$	$C_2$	VAN à 10%	Indice de profitabilité
A	-10	30	5	21	2,1
B	-5	5	20	16	3,2
C	-5	+5	15	12	3,4
D	0	-40	60	13	0,4

- ▶ Accepter les projets B et C ?
- ▶ Ou bien accepter A à la période 0 et entreprendre le projet D à la période 1.

## Exercices intérêts composés

2) Un investissement de 50000 € est envisagé. Cette dépense apportera une recette de 25000 € dans 3 ans et de 35000 dans 4 ans. Sachant que l'alternative est le placement à intérêts composés,

1. Au taux de 4% l'investissement sera-t-il réalisé ?
2. Même question au taux de 6%.
3. Déterminer le taux d'intérêt pour lequel l'investissement et le placement sont indifférents ?

## Exercices VAN

1) Considérez les trois projets d'investissement suivants, générant des revenus sur une durée maximum de trois ans :

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projet 1	-100	10	10	110
Projet 2	-100	10	10	100
Projet 3	-100	0	0	140

Pour chacun d'entre-eux dire si la VAN est strictement positive, si la VAN est strictement négative ou si la VAN est nulle, sachant que le taux d'intérêt est de 10%. Vos réponses doivent être justifiées par un calcul actuariel.

## Exercices VAN

2) Considérer les trois projets suivants, dans un contexte où le taux d'intérêt est de 5%.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	VAN	TRI
Projet 1	-100	0	70	70	23,96	14,51%
Projet 2	-10	2	7	7	4,30	23,08%
Projet 3	-50	5	5	55	6,81	10,00%

- (a) Si vous avez 120 euros à investir et que les projets sont uniques et indivisibles, comment les investissez-vous ? Détaillez votre réponse, jusqu'au dernier euro.
- (b) Si vous avez 120 euros à investir et qu'il est possible d'acheter des fractions de ces projets uniques, comment les investissez-vous ? Détaillez votre réponse, jusqu'au dernier euro.

## Exercices VAN

3) L'entreprise que vous possédez doit acquérir des équipements coûteux. Parmi les nombreuses offres que vous avez reçues, deux ont retenu votre attention. Un premier vendeur vous propose de vous céder ces équipements pour un paiement comptant de 100 millions d'euros. Un deuxième vous propose de payer 22 millions d'euros chaque année pendant  $n$  années, à partir de la première année :

Année	0	1	2	3	...	$n$
Paiements	0	22	22	22	22	22

Sachant que le taux d'actualisation est de 10%, à partir de combien d'années refusez-vous le leasing ?