

# Incitations et coordination

## 3

### Les modèles d'action cachée avec un principal

## Préambule : effort

Un ou plusieurs agents doivent faire une tâche pour le principal. Ils peuvent choisir plusieurs niveaux d'engagement dans leur tâche, qui se traduisent par un meilleur output. Cependant ce niveau d'engagement qu'on appelle *effort* n'est pas vérifiable, c'est-à-dire qu'on ne peut pas écrire un contrat contingent à l'effort. Aucun tribunal ne pourrait vérifier les conditions des termes du contrat.

Cette hypothèse est en particulier cohérente s'il n'y a pas un lien direct entre l'output et l'action choisie. Deux cas possibles

- ▶ effet aléatoire : le résultat de l'action choisie par l'agent est aléatoire. L'effort permet d'améliorer la *probabilité de succès*
- ▶ effet déterministe : le résultat de l'action choisie dépend aussi d'un autre paramètre qui est caché. On ne sait donc pas quelle est la part d'effort, quelle est la part de ce paramètre caché.

La variable effort n'a pas de définition intrinsèque, elle est souvent définie à travers ses effets, cad les résultats de l'action de l'agent.

## Préambule : effort et output

- ▶ On ne sait pas distinguer l'effort de l'output.
- ▶ L'effort est non vérifiable, il "est caché" dans l'output

$$\text{Output} = \text{Effort} + \text{Alea}$$

$$\text{Output} = \text{Effort} + \text{Variable cachée}$$

# Exemples

L'effort désigne toute variable qui n'est pas vérifiable mais cruellement pertinente pour le principal.

- ▶ La prudence d'un assuré affecte son exposition au risque, soit la probabilité d'occurrence d'un accident, soit la gravité d'un accident
- ▶ le niveau d'investissement d'une firme régulée réduit ses coûts de production d'un bien public
- ▶ La qualité du travail d'un employé améliore la réussite d'un produit et les bénéfices de la firme
- ▶ L'ardeur au travail d'un étudiant augmente sa culture et son jugement

# Les incitations monétaires

Une manière assez courante d'*inciter* les agents à faire des bons choix est de les rémunérer. C'est un principe de base de la gestion des firmes. C'est une application directe du principe de révélation généralisé.

On appelle *incitation monétaire* tout système de transfert du principal vers le/les agents, qui est contingent à une variable observable qui est corrélée avec la variable non observée.

- ▶ La franchise de l'assuré peut être compris comme un montant variable de sa prime contingente à ses sinistres
- ▶ Les prises de participation dans les résultats de la boîte, les primes des salariés, sont des instruments qui partagent le risque entre le principal-employeur et les salariés. Le salaire est contingent aux "résultats" de la firme
- ▶ Fermage ou metayage? En France, le *métayage* est un type de bail rural dans lequel un propriétaire, le bailleur, confie à un métayer le soin de cultiver une terre en échange d'une partie de la récolte. Le *fermage* est le loyer du contrat passé entre le bailleur et le fermier (affermage) dont le montant est convenu à l'avance et indépendant des résultats d'exploitation.

# Mécanismes Principal-Agent

## *Le cadre théorique de Myerson*

Souvenez-vous, il y a l'espace des actions du principal  $D_0$  et celui de chacun des agents,  $D_i$ . On sait que le principe de révélation implique que le mécanisme final sera tel que l'agent fera l'action que lui indique le principal. Cependant, rien n'est dit sur  $D_0$ , c'est-à-dire sur les instruments dont dispose le principal.

## *Application du cadre de Myerson & puissance des mécanismes*

On trouve dans la littérature une abondante variété de mécanismes qui dépassent les incitations monétaires élémentaires que l'on a évoquées.

- ▶ Il peut y avoir d'autres dimensions par lesquels le principal peut affecter l'utilité de l'agent [qualité de vie, liens affectifs...]
- ▶ S'il il y a plusieurs agents, le principal peut avoir recours à des mécanismes de groupe. [micro-crédit, tournoi...]

# Diversité des mécanismes

On appelle *incitation* tout instrument par lequel le principal peut modifier l'utilité du/des agents, de manière contingente à une variable observable qui est corrélée avec la variable non observée.

- ▶ Sur un plateau de téléopérateurs, en appels sortants, on donne une place de cinéma à celui qui a obtenu le meilleur résultat de la journée [en taux d'accord par exemple] : Ces *incentives* fonctionnent en général très bien, alors qu'elles sont bien inférieures en valeur à la valeur d'une heure travaillé.
- ▶ Une des premières idées de la Grameen Bank était de punir les membres de la famille de l'emprunteur, en ne leur permettant pas d'emprunter à leur tour, si l'emprunteur faisait défaut. Ici, l'utilité est modifiée via le jeu qu'il peut y avoir entre emprunteur et sa famille
- ▶ Lorsque l'employeur se la joue copain avec ses employés, ceux-ci peuvent mieux travailler. On observe parfois des relations de dévouement qui ne sont pas toujours facilement modélisables.

# Les mauvaises incitations

Le problème étudié est assez général. Comment induire des agents à favoriser certains comportements, dans des contextes où on ne peut pas les obliger à avoir ces comportements, mais où tout de même on peut les influencer par des incitations.

Notez que parfois, on crée des incitations sans le savoir. C'est-à-dire que des politiques publiques ont des effets sur certains comportements des agents qui n'étaient pas attendus, comme le montre l'exemple de Peltzam

*Peltzam (1975)*

Cet auteur fait une étude empirique sur l'effet du port de la ceinture en voiture. Il démontre que les lois qui rendent obligatoire le port de la ceinture ont augmenté la vitesse moyenne des automobilistes et ont eu une incidence négative sur les accidents, en particulier avec les piétons.

# Plan du cours

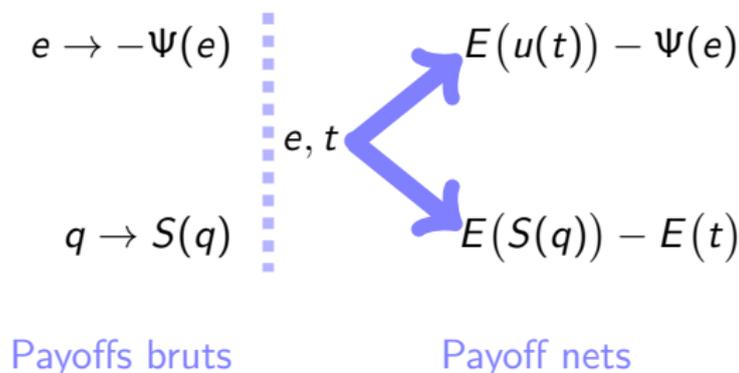
0. Effort non vérifiable, incitations sur des variables corrélées
1. Modèle élémentaire, effort discret, deux niveaux de résultat
2. Forme des transferts avec plus de deux niveaux de résultat

# Modèle Principal-Agent à deux niveaux d'efforts

- les paramètres du modèle
- Le programme du principal
- Les contraintes d'incitation et de participation
- Le cas de l'agent neutre au risque
- Le cas de l'agent averse au risque
- Propriétés des mécanismes de second rang

# Présentation du modèle à deux niveaux d'effort

Un joueur  $P$  délègue une tâche dont l'issue dépend du niveau de l'effort  $e \in \{0, 1\}$  effectué par l'agent. De l'effort choisi à la période interim dépend la probabilité de succès  $\pi(e)$  de la production : Avec probabilité  $\pi(e)$ , le niveau de production est égal à  $\bar{q}$ , Avec probabilité  $1 - \pi(e)$ , le niveau de production est égal à  $\underline{q}$ .



# La forme du mécanisme optimal

- ▶ Les mécanismes directs révélateurs sont tels que l'agent va choisir l'action qui est désirée par le principal.
- ▶ Les contrats sur lesquels le principal peut s'engager sont des contrats qui peuvent être contingents sur le niveau de production observé ex post. Ces contrats précisent la contrepartie de l'agent, contingente au résultat.
- ▶ Dans le cas où il s'agit de transfert entre l'agent et le principal, le contrat va stipuler deux niveaux de transfert  $\bar{t}$ ,  $\underline{t}$ , contingents au résultat.
- ▶ le paiement de l'agent dépend de sa désutilité  $\Psi(e)$  et de la lotterie  $\bar{t}$ ,  $\underline{t}$  de probabilité  $\pi(e)$ ,  $1 - \pi(e)$
- ▶ le paiement du principal dépend du surplus créé par la production  $S(q)$  auquel doit être soustraite la variable de transfert aléatoire  $\bar{t}$ ,  $\underline{t}$  de probabilité  $\pi(e)$ ,  $1 - \pi(e)$

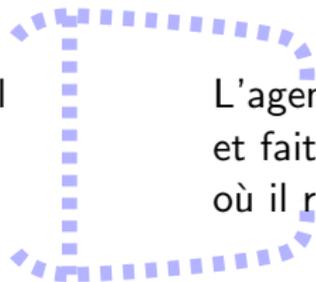
# Hypothèses sur les préférences et les payoffs

- ▶ **principal neutre au risque** Le principal est neutre au risque : c'est-à-dire que son objectif dépend de la moyenne des surplus et des transferts qu'il obtient. C'est donc :  $E(S(q) - t)$ . On dénote  $\bar{S} = S(\bar{q})$  et  $\underline{S} = S(\underline{q})$ .
- ▶ **agent averse au risque** Les agents sont averses au risque, et le terme de désutilité est séparable. Il existe donc une fonction VNM telle que leur utilité est :  $E(u(t)) - \Psi(e)$ . Sans perte de généralité on note  $\Psi(0) = 0$  et on note  $\Psi(1) = \Psi$ .
- ▶ **utilité de réservation de l'agent** Les agents ont une utilité de réservation égale à 0, c'est-à-dire ce qu'ils obtiendraient sans faire d'effort et sans recevoir de transfert.

# Les contrats optimaux 1

*ce qui est commun au First best et au Second best*

Le principal  
propose le  
contrat .



L'agent accepte le contrat  
et fait l'action désirée,  
où il refuse le contrat.

Le contrat, c'est ici la précision des valeurs de  $\bar{t}$ , de  $\underline{t}$  et de  $e$ .  
Du First Best au Second Best, les contrats proposés sont différents.  
Principal et agent perdent en général du surplus au second best.

# Les contrats optimaux 2

## *les différences*

### Au First Best

- le Principal décide  $\bar{t}$ ,  $\underline{t}$  et aussi  $e$ .
- On calcule  $\bar{t}(e)$  et  $\underline{t}(e)$ ,
  
- puis le  $e$  optimal

### Au second best

- le Principal décide  $\bar{t}$  et  $\underline{t}$  et l'agent choisit  $e$ .
- On calcule  $\bar{t}(e)$  et  $\underline{t}(e)$ ,  $e$  étant compatible avec le niveau d'effort effectivement choisi par l'agent,
- puis le  $e$  optimal

# Le contrat optimal au First Best

*Le programme du principal*

■ S'il impose le niveau d'effort  $e$ , le programme du *principal* est

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{t}, \bar{t}} \pi_e(\bar{S} - \bar{t}) + (1 - \pi_e)(\underline{S} - \underline{t}) \\ \text{s.c.} \quad & \pi_e u(\bar{t}) + (1 - \pi_e)u(\underline{t}) - \Psi_e \geq 0 \end{aligned}$$

*résolution : contrat optimal de l'agent*

- ▶ lagrangien  $\mathcal{L} = \pi_e(\bar{S} - \bar{t}) + (1 - \pi_e)(\underline{S} - \underline{t}) + \lambda[\pi_e u(\bar{t}) + (1 - \pi_e)u(\underline{t}) - \Psi_e]$
- ▶ ici,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{t}} = 0$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{t}} = 0$  impliquent  $\lambda \neq 0$  et  $u'(\bar{t}) = u'(\underline{t})$ , d'où  $\bar{t} = \underline{t}$
- ▶ Dans ce modèle, au premier rang, tout le risque est supporté par le principal. L'agent obtient le transfert qui compense exactement son effort, indépendamment du résultat aléatoire de la production :  $t = u^{-1}(\Psi_e)$

*résolution : la condition pour induire l'effort*

- ▶ On compare  $V_1 = \pi_1 \bar{S} + (1 - \pi_1) \underline{S} - u^{-1}(\Psi)$  à  $V_0 = \pi_0 \bar{S} + (1 - \pi_0) \underline{S}$
- ▶ le principal induit l'effort si  $(\pi_1 - \pi_0)(\bar{S} - \underline{S}) \geq u^{-1}(\Psi)$ .

# Le Second Best 1

*Le programme de l'agent*

■ Si le principal impose les rémunérations  $\bar{t}$  et  $\underline{t}$ , le programme de l'agent est

$$\max \left( \max_e \pi_e u(\bar{t}) + (1 - \pi_e) u(\underline{t}) - \Psi_e, 0 \right)$$

Ce programme est entièrement représenté par les contraintes d'incitations et de participation de l'agent.

*la contrainte d'incitation sur le contrat  $(\bar{t}, \underline{t})$*

Un agent choisit de faire l'effort, étant donné le contrat  $(\bar{t}, \underline{t})$  si

$$\pi_1 u(\bar{t}) + (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \Psi \geq \pi_0 u(\bar{t}) + (1 - \pi_0) u(\underline{t})$$

*la contrainte de participation sur le contrat  $(\bar{t}, \underline{t})$*

L'agent participe, s'il choisit de faire l'effort, étant donné le contrat  $(\bar{t}, \underline{t})$  et s'il obtient plus que son utilité de réservation.

$$\pi_1 u(\bar{t}) + (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \Psi \geq 0 \quad (\text{CP})$$

# La contrainte d'incitation

*Résolution simple*

L'agent décide de faire l'effort si et seulement si

$$u(\bar{t}) - u(\underline{t}) \geq \frac{\Psi}{\pi_1 - \pi_0}$$

► Plus l'effort est coûteux, ou moins l'effort est efficace ( $\Psi$  grand,  $\pi_1 - \pi_0$  petit), plus le différentiel entre les niveaux de transferts que l'on doit mettre en place pour obtenir que l'agent choisisse l'effort est élevé. L'unique manière d'inciter l'agent à faire un niveau d'effort élevé est qu'il supporte alors en partie le risque.

# Le Second Best 2

*Le programme du principal*

■ S'il impose le niveau d'effort  $e$ , le programme du *principal* est

$$\begin{aligned} \max_{\underline{t}, \bar{t}} \quad & \pi_e(\bar{S} - \bar{t}) + (1 - \pi_e)(\underline{S} - \underline{t}) \\ \text{s.c.} \quad & \pi_e u(\bar{t}) + (1 - \pi_e)u(\underline{t}) - \Psi_e \geq 0 \\ & (\pi_e - \pi_{-e}) (u(\bar{t}) - u(\underline{t})) \geq \Psi \end{aligned}$$

$\pi_{-e}$  désignant la probabilité de réussite de l'effort complémentaire de  $e$ .

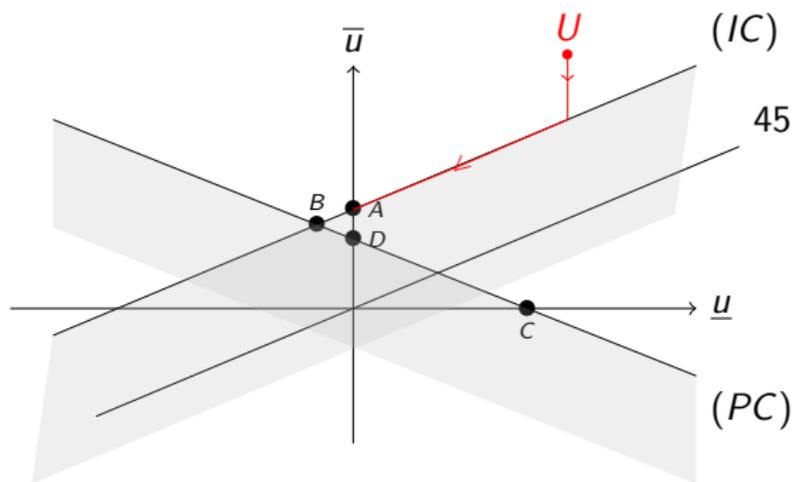
*Changement de variable : réécriture du programme*

Notons  $h(\cdot) = u^{-1}(\cdot)$ ,  $\bar{u} = u(\bar{t})$ ,  $\underline{u} = u(\underline{t})$ . Le programme devient

$$\begin{aligned} \max_{\underline{u}, \bar{u}} \quad & \pi_e(\bar{S} - h(\bar{u})) + (1 - \pi_e)(\underline{S} - h(\underline{u})) \\ \text{s.c.} \quad & \pi_e \bar{u} + (1 - \pi_e)\underline{u} - \Psi_e \geq 0 \quad (\text{CP}) \\ & (\pi_e - \pi_{-e}) (\bar{u} - \underline{u}) \geq \Psi \quad (\text{CI}) \end{aligned}$$

- ▶ L'objectif du programme est concave et les contraintes, linéaires.
- ▶ On note  $\lambda$  le multiplicateur associé à CP et  $\mu$  celui associé à CI.

# Représentation des deux contraintes dans un espace $\underline{u}, \bar{u}$



- ▶ La contrainte d'incitation est une droite croissante, parallèle à la 45 degrés
- ▶  $(\underline{u}, \bar{u})$  doit être au dessus de la contrainte. On grise le complément
- ▶ La contrainte de participation, droite décroissante est en dessous de CI en son point  $D(0, \frac{\Psi}{\pi_1})$  d'intersection avec l'axe vertical  $[(\pi_1 - \pi_0)(\frac{\Psi}{\pi_1} - 0) < \Psi]$ .
- ▶  $(\underline{u}, \bar{u})$  doit être au dessus de la contrainte. On grise le complément
- ▶ Tout point  $U$  dans l'orthant positif est dominé par  $A$  : C'est le point optimal si l'on a des contraintes selon lesquelles  $\underline{u}, \bar{u}$  doivent être positifs
- ▶ donc : A distinguer deux cas suivant que  $\underline{u}, \bar{u}$  doivent être positifs ou non

# Cas de l'agent neutre au risque

- ▶  $u(t) = t$ . Autrement dit,  $\bar{u} = \bar{t}$  et  $\underline{u} = \underline{t}$ .
- ▶ On peut alors admettre que l'agent puisse recevoir des paiements négatifs

## Résolution graphique

- ▶ Lorsque l'on se déplace sur (IC), à la fois  $\bar{t}$  et  $\underline{t}$  décroissent. Il est immédiat que tout point  $U$  est dominé par  $B$  de coordonnées  $\left(-\frac{\pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\Psi, \frac{1 - \pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\Psi\right)$ .
- ▶ Ce même argument, généralisé indique que l'optimum doit être pris sur la PC, à gauche de  $B$ .
- ▶ En fait, il est immédiat que l'objectif du principal et la PC sont parallèles. Ainsi, l'objectif du principal est constant sur la PC, toute la  $1/2$  droite est solution
- ▶ A noter que  $\pi_1 \left(-\frac{\pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\Psi\right) + (1 - \pi_1) \left(\frac{1 - \pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\Psi\right) = \Psi$ , ce qui signifie que le coût du mécanisme est identique à celui du first best [on donnait  $t = \Psi$ ]

## Interprétation

- ▶ Lorsque l'agent est neutre au risque, il n'y a pas de perte d'efficacité, ni pour l'agent, ni pour le principal. Cependant, le contrat est différent de  $C$  [sur la 45]

## Implementation : les actionnaires vendent l'entreprise à l'agent

Une des manières d'implémenter le contrat optimal consiste pour les actionnaires à vendre l'entreprise au dirigeant (à l'agent).

Cas où il est optimal d'inciter l'effort

Si l'entreprise appartient à l'agent, il perçoit  $\bar{V}$  dans le bon état et  $\underline{V}$  dans le mauvais. Comme il a dû acheter l'entreprise (il la paye  $W$ ), ses revenus sont contingents de la forme :  $\bar{t} = \bar{V} - W$  et  $\underline{t} = \underline{V} - W$ .

On cherche donc s'il existe  $W$  tel qu'un tel couple de transfert satisfasse les contraintes d'incitations et de participation, c'est-à-dire que

$\bar{V} - W \geq \frac{1 - \pi_0}{\pi_1 - \pi_0} \Psi$  et  $\underline{V} - W = \frac{\Psi}{1 - \pi_1} - \frac{\pi_1}{1 - \pi_1} (\bar{V} - W)$ . Ce qui conduit d'une part à la valeur espérée de l'entreprise sachant que  $e = 1$

$$W = \pi_1 \bar{V} + (1 - \pi_1) \underline{V} - \Psi$$

et d'autre part à la condition qui stipule que l'effort  $e = 1$  est rentable :

$$(\pi_1 - \pi_0)(\bar{V} - \underline{V}) \geq \Psi$$

Donc chaque fois qu'il est optimal en information parfaite de faire l'effort  $e = 1$ , la vente de l'entreprise au dirigeant pour le montant  $W$  égal à la valeur espérée de l'entreprise sachant que  $e = 1$  induit le propriétaire-agent à exercer l'effort optimal.

## Cas de l'agent averse au risque

►  $u(\bar{t}) \neq \bar{t}$ . On peut aussi faire l'hypothèse  $u(0) = 0$  et qu'il y a impossibilité que l'agent puisse recevoir des paiements négatifs

### Résolution graphique

► Lorsque l'on se déplace sur (IC), à la fois  $\bar{t}$  et  $\underline{t}$  décroissent. Il est immédiat que tout point  $U$  est dominé par  $A$  de coordonnées  $\left(0, \frac{\Psi}{\pi_1 - \pi_0}\right)$  : c'est l'optimum.

► A noter que  $\pi_1 h\left(\frac{\Psi}{\pi_1 - \pi_0}\right) + (1 - \pi_1)h(0) > h\left(\frac{\pi_1 \Psi}{\pi_1 - \pi_0} + 0\right) > h(\Psi)$  : le coût du mécanisme de second best est supérieur [ au first best on donnait  $t = h(\Psi)$  ]

► A noter aussi que  $\pi_1 \left(\frac{\Psi}{\pi_1 - \pi_0}\right) + (1 - \pi_1) * 0 = \frac{\pi_1}{\pi_1 - \pi_0} \Psi > \Psi$  : l'utilité de l'agent est supérieure au second best [ au first best il obtenait  $\Psi$  ]

### Interprétation

- La contrainte d'incitation est saturée, mais pas la contrainte de participation
- Dans le cas de l'agent averse au risque aussi, les paiements sont contingents.
- Nouveau : l'agent obtient une rente afin de prendre la bonne action.
- aussi, le payoff du principal diminue et on montre que l'allocation n'est pas un optimum.

# Méthode du Lagrangien (cas $e = 1$ )

## Le Lagrangien

▶ Le programme est convexe, on peut maximiser le lagrangien

$$\mathcal{L} = \pi_1(\bar{S} - h(\bar{u})) + (1 - \pi_1)(\underline{S} - h(\underline{u})) \\ + \lambda(\pi_1\bar{u} + (1 - \pi_1)\underline{u}) + \mu((\pi_1 - \pi_0)(\bar{u} - \underline{u})) + \bar{\nu}\bar{u} + \underline{\nu}\underline{u}$$

▶ Les conditions premières sont :

$$h'(\bar{u}) = \lambda + \mu\left(1 - \frac{\pi_0}{\pi_1}\right) + \bar{\nu} \quad h'(\underline{u}) = \lambda - \mu\left(1 - \frac{\pi_0}{\pi_1}\right) + \underline{\nu}$$

## Analyse

▶ Si aucune des contraintes de bord n'était saturée, cad  $\bar{\nu} = \underline{\nu} = 0$  on trouve  $\lambda = \frac{h'(\bar{u}) + h'(\underline{u})}{2} > 0$  et  $\mu = \frac{h'(\bar{u}) - h'(\underline{u})}{2} > 0$ , ce qui impliquerait que les deux contraintes sont saturées, que l'utilité espérée obtenue avec les deux niveaux d'effort est nulle. Mais cela implique alors qu'au point d'intersection des deux contraintes, nécessairement  $\underline{u} < 0$ .

▶  $\bar{\nu} > 0$  conduit à  $\bar{u} = 0$  et à la contradiction  $h'(0) = 0 > 0$ .

▶ Donc  $\underline{\nu} > 0$ ,  $\bar{\nu} = 0$  et  $\underline{u} = 0$ . La second FOC s'écrit  $0 = \lambda - \mu\left(1 - \frac{\pi_0}{\pi_1}\right) + \underline{\nu}$ , ce qui implique  $\mu > 0$ , la contrainte d'incitation est saturée.

# Rente informationnelle

Définition

Si l'on dénote  $(\bar{t}^{**}, \underline{t}^{**})$  le contrat de second rang et  $t^*$  le transfert de premier rang, si on denote par ailleurs  $e^{**}$  et  $e^*$  les niveaux d'effort correspondant, alors, on appelle rente informationnelle la quantité supplémentaire qu'il faut donner à l'agent pour l'inciter à l'effort de second rang.

$$R = (\pi_{e^{**}} \bar{t}^{**} + (1 - \pi_{e^{**}}) \underline{t}^{**}) - t^*$$

Théorème

La rente informationnelle est toujours positive ou nulle. Lorsque est nulle, cela ne signifie pas que le contrat est de premier rang.

En effet, il suffit de remarquer que les quantités  $\pi_{e^{**}} \bar{t}^{**} + (1 - \pi_{e^{**}}) \underline{t}^{**}$  et  $t^*$  sont respectivement dérivés des solutions optimales des deux programmes

$$\begin{array}{ll} \max_{\underline{u}, \bar{u}, e} \pi_e (\bar{S} - h(\bar{u})) + (1 - \pi_e) (\underline{S} - h(\underline{u})) & \max_{\underline{u}, \bar{u}, e} \pi_e (\bar{S} - h(\bar{u})) + (1 - \pi_e) (\underline{S} - h(\underline{u})) \\ \text{s.c. } \pi_e \bar{u} + (1 - \pi_e) \underline{u} - \Psi_e \geq 0 & \text{s.c. } \pi_e \bar{u} + (1 - \pi_e) \underline{u} - \Psi_e \geq 0 \\ e \in \operatorname{argmax}_{\hat{e}} \pi_{\hat{e}} \bar{u} + (1 - \pi_{\hat{e}}) \underline{u} - \hat{e} \Psi & \end{array}$$

# Rente informationnelle et utilité des agents averse au risque

## Proposition

*En ce qui concerne les payoffs de l'agent, deux cas sont à envisager : Soit l'agent obtient une plus grande utilité qu'au premier rang, et une rente informationnelle, soit, il obtient la même utilité qu'au premier rang, et c'est alors le contrat de premier rang lui même.*

## Preuve

1. Déjà, puisque l'agent, au premier rang obtenait son utilité de réservation égale à zéro, on doit noter qu'au second rang, il obtient une utilité au moins égale.
2. Si l'agent obtient l'utilité de premier rang au travers du mécanisme de second rang  $(\bar{t}, \underline{t})$ , alors nécessairement, ce mécanisme peut être utilisé au premier rang. Mais comme au premier rang, le programme est strictement convexe, on en déduit que le mécanisme  $(\bar{t}, \underline{t})$  est identique au mécanisme de premier rang, à savoir  $\bar{t} = \underline{t} = t^*$ .



# Ce que produisent les mécanisme de second rang

Problématique

Considérons l'ensemble de ces économies de second rang, quand le paramètre  $\Psi$  varie. Que peut-on dire sur l'effort qui est optimalement choisi au second rang ?

Théorème

*L'effort est moins souvent choisi au second rang qu'au premier rang.*

Preuve

Notons  $R(\Psi) \geq 0$  la rente informationnelle que le principal doit payer au second best, en supplément à ce qu'il donnerait normalement au premier rang, à savoir  $h(\Psi)$ . La condition sous laquelle le principal incite l'agent à faire l'effort au second rang est

$$(\pi_1 - \pi_0)(\bar{S} - \underline{S}) \geq h(\Psi) + R(\Psi).$$

Comparée, à la condition sous laquelle le principal incite l'agent à faire l'effort au second rang,

$$(\pi_1 - \pi_0)(\bar{S} - \underline{S}) \geq h(\Psi),$$

cette dernière est moins restrictive. Le principal choisit moins souvent d'induire l'effort au second rang.



# Modèle Principal-Agent à plusieurs niveaux d'efforts

- Quelle est la forme du mécanisme incitatif?
- Monotonie du ratio de vraisemblance
- Monotonie des transferts sous MLRP

# Modèle à $n$ réalisations

## Problématique

Il y a toujours deux niveaux d'effort possibles,  $e \in \{0, 1\}$ , mais  $n \geq 3$  niveaux de performance,  $q_1 < \dots < q_i < \dots < q_n$ . La distribution des réalisations est contingente à l'effort :

$$\pi_{ie} = Pr(q_i|e) > 0 \quad \forall i, \forall e$$

## Exemple

Probab d'occurrence de ...	$q_1$	$q_2$	$q_3$
si $e = 0$	1/3	1/3	1/3
si $e = 1$	1/6	1/3	1/2

## Exercice

Calculer la probabilité que  $e = 1$  si  $q_1$  apparaît, puis que  $e = 1$  si  $q_2$  apparaît, et enfin que  $e = 1$  si  $q_3$  apparaît. Qu'en déduisez-vous ?



# Implémentation et Mécanisme optimal si $e = 1$

Programme optimal

$$\begin{aligned} \max_{t_1, t_2, t_3} & & & - \sum_i \pi_{i1} t_i \\ \text{s.c.} & & & \sum_i \pi_{i1} u(t_i) \geq \Psi & (\lambda) \\ & & & \sum_i (\pi_{i1} - \pi_{i0}) u(t_i) \geq \Psi & (\mu) \end{aligned}$$

Conditions premières

$$u'(t_i) = \frac{\lambda}{1 - \mu \frac{\pi_{i0}}{\pi_{i1}}}$$

- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $\frac{\pi_{i0}}{\pi_{i1}}$
- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}}$
- ▶  $u'(t_i)$  croissant avec  $Pr(e = 1|i) = \frac{Pr((e=1)\&(i))}{Pr(i)}$   
$$= \frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0} + \pi_{i1}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi_{i1}}{\pi_{i0}}}$$

# L'exemple revisité

Propriété du mécanisme optimal

$$t_1 < t_2 < t_3$$

Valide uniquement parce que la vraisemblance que  $e = 1$  est croissante avec  $i$

Résoudre dans le cas  $u(x) = \ln(x)$  et  $\Psi \leq 1$

Cad trouver  $\lambda$  et  $\mu$  positifs ou nuls.

- Que se passe t'il dans le cas  $\Psi \geq 1$  ?