

Incitations et coordination

2

Modèle Principal-Agent

Mido M1 - Arnold Chassagnon, Université Paris-Dauphine, LEDA-SDFi, PSE - Février 2010

15 février 2011

Préambule : coopération et jeux non-coopératifs

Lorsque l'équilibre d'un jeu non-coopératif est dominé au sens de Pareto, on a le sentiment qu'une coopération entre les joueurs pourrait améliorer l'issue de ce jeu.

- ▶ Les joueurs pourraient par exemple s'interdire de jouer une "mauvaise" stratégie
- ▶ Mais cela n'est possible que s'ils pouvaient s'engager crédiblement sur les stratégies qu'ils vont choisir (*par exemple s'ils peuvent modifier leur payoff en introduisant une pénalité qu'ils s'infligeraient s'ils déviaient de la stratégie coopérative*)

La coopération n'est pas toujours possible. Elle nécessite des ingrédients qui ne sont pas compris dans le jeu non-coopératif, en particulier, d'avoir la possibilité de modifier les règles du jeu.

Coopération et communication

La communication, bien qu'insuffisante pour assurer une coopération semble en est parfois un des éléments nécessaires.

Mais, Communiquer

- ▶ contient plus qu'une simple déclaration mutuelle des joueurs se disant (simplement) qu'ils s'interdisent certaines stratégies ;
- ▶ à ce stade un peu pauvre, la communication ne demeurerait que du *cheap talk* tant que les règles du jeu n'ont pas été modifiées en conformité avec ce qui s'est dit.
- ▶ Il y a coopération quand les joueurs se sont communiqués les actions sur lesquelles ils s'engagent avec la modification des règles du jeu qui rendent crédible leur engagement.

Communication et coopération

Communiquer peut avoir une définition plus *légère*, n'incluant pas l'idée d'engagement. On pense aux cas où l'information sur les types n'est pas *common knowledge* et qu'il s'agit de révéler aux autres joueur son type. Mais, là, il convient de remarquer

- ▶ qu'il y a un réel problème de crédibilité quand au dévoilement d'une information privée ;
- ▶ qu'une révélation concernant le type d'un joueur modifie la perception du jeu des autres joueurs
- ▶ En dévoilement une information privée, un joueur s'engage vis-à-vis des joueurs, tout en modifiant le jeu et entrave (en partie) sa liberté

Autrement dit, tout dévoilement de l'information peut s'assimiler à l'introduction d'éléments coopératifs dans le jeu. [par exemple un joueur pourrait valablement s'engager sur une stratégie coopérative en dévoilant de l'information **crédible** sur son type

Communication

Introduire des ingrédients de communication dans des jeux *a priori* non coopératifs conduit naturellement à se poser la question suivante :

- ▶ Comment décrire synthétiquement l'ensemble des processus par lesquels les individus parviennent à un accord ?
- ▶ Peut-on anticiper le résultat qui émergera effectivement des pourparlers ?

Communication et équilibre

A l'instar d'un joueur de poker, chaque individu est tenté de ruser au moment de communiquer, mais est tributaire des stratégies des autres. Les méthodes de la théorie des jeux permettent d'identifier les meilleures *stratégies de communication*.

- ▶ Hurwicz requiert que chaque joueur adopte une stratégie "dominante"
- ▶ E. Maskin et R. Myerson demandent, plus modestement, que les stratégies de communication forment un équilibre de Nash.

Les phases du jeu

Informations	sur le monde, sur soi	Individuelles
Discussions	au travers d'échanges directs, de communications, d'envoi de signaux ; → Affichage d'un prix, d'une caractéristique, d'une croyance, ... → Affirmation d'une qualité "comme quoi on est pas menteur", etc..	Révélation partielle ou totale de l'information,
Décisions	actions choisies individuellement, éventuellement contingentes à l'information qui aura été reçue	Equilibre du jeu

Exemple 1 Coordination d'un groupe autour d'une décision

Considérons un *groupe* d'individus, aux objectifs potentiellement conflictuels, *qui doit prendre une décision*. Chacun dispose d'informations personnelles, comme ses croyances sur le monde qui l'entoure ou comme ses propres préférences sur les choix concevables. La décision est prise au terme d'une discussion pendant laquelle les membres du groupe, éventuellement assistés d'un médiateur, dévoilent plus ou moins d'information.

- ▶ les éléments de communication font partie de la définition d'une stratégie d'un joueur
- ▶ L'output d'équilibre peut-être interprété comme la décision du groupe.

Exemple 2 Planification : Evaluation et Coordination

Considérons un *planificateur social* qui recherche le bien-être de la société et les moyens de permettre aux individus d'atteindre cet idéal. Il est confronté à deux types de problèmes : il ne connaît que partiellement le type des agents de l'économie et il ne peut pas (ne veut pas) contrôler les choix des actions au niveau individuel.

- ▶ Le planificateur social cherche tout d'abord l'allocation optimale des ressources étant donné les caractéristiques de l'économie (agents & ressources).
- ▶ Son rôle ne s'arrête pas là. En tant que "mechanism designer" il met en place un mécanisme de coordination pour que les agents maximisent le Bien-Etre Social dans un contexte décentralisé
- ▶ Ces deux opérations sont reliées et font partie d'un programme unique où le planificateur décide des règles du jeu social

Joueurs communicants - Maîtres du jeu - Principaux

En pensant à la structure d'un jeu, il n'est pas totalement irréaliste de penser qu'il y a des joueurs qui ont plus de facilité de communication, soit parce qu'ils ont plus d'horizon que les autres joueurs ou pour toute autre raison. On peut aussi penser qu'un joueur ayant la capacité de changer les règles du jeu maîtrise la communication.



On analyse dans ce chapitre des jeux dans lesquels on supposera qu'il existe un **Principal**, *qui dispose d'instruments* lui permettant de modifier les règles du jeu et *dont une des charges* est de faciliter la communication entre les agents,

Rôle différencié des joueurs

La description des processus de communication induit une distribution différenciée des rôles de chacun des joueurs.

On appellera *Agent* tout joueur d'un jeu non-coopératif tant qu'il accepte passivement les règles du jeu. l'agent :

- ▶ ne peut pas modifier l'issue du jeu de manière autoritaire,
- ▶ n'influence pas le jeu en communiquant avec les autres joueurs.

Au contraire, on appellera *Principal* tout joueur qui peut modifier une situation sociale,

- ▶ en établissant des règles de communication
- ▶ et/ou des structures d'incitations auxquelles les autres joueurs vont réagir.

Agents et Principaux : un modèle généralisé

Un problème principal agent généralisé est un modèle hybride entre un jeu coopératif et un jeu non coopératif.

- ▶ Les agents agissent de manière non coopérative, en maximisant leurs objectifs et acceptent passivement tout équilibre de Nash du jeu que le principal aura choisi
- ▶ Les possibilités de communication et de coopération sont entièrement contrôlées par les principaux.

Plan du cours

0. Coopération, communication, rôles différenciés
1. Définition et idée du modèle principal-Agent
2. Exemple 1 : Régulation d'un monopole public
3. Implémentation et Mécanisme optimal.
4. Exemple 2 : le problème des biens publics
5. Mécanisme en stratégie dominante et mécanisme bayésien
6. Exemple 3 : Mécanisme de Clarke - Groves

1. Definition du modèle Principal-Agent

Un principal *délègue* une tâche à un ou plusieurs agents. Principal et agents ont des conflits d'intérêt. Les payoffs du principal et des agents dépendent des actions des agents et du principal.

- Les agents peuvent avoir des domaines de décision privés et/ou des informations que le principal ne peut pas contrôler ou connaître directement.
- Le principal a la possibilité (légale) de demander de l'information aux agents, et après analyse des différentes informations qui lui sont transmises, d'envoyer des prescriptions aux agents, en fonction desquelles ils vont régler leurs actions

Idée du modèle Principal-Agent

Situation où un acteur (le principal) souhaite déléguer à une tierce personne (l'agent) le soin d'exécuter une tâche en étant intéressé à son résultat. Dans ce contexte, le principal fait face à deux catégories de défaut d'information (appelées asymétries d'information) :

- ▶ Le résultat de l'action, son coût par exemple, peut dépendre des caractéristiques propres de l'agent, connues de lui mais inconnues du principal.
- ▶ Le résultat de l'action peut dépendre d'efforts entrepris par l'agent pour s'acquitter de sa tâche, efforts inobservables directement par le principal. Ce dernier n'en connaît que le résultat mais celui-ci dépend d'aléas extérieurs.

Si le principal ne souhaite pas accomplir lui-même la tâche, il ne peut pas non plus contraindre l'agent à la réaliser coûte que coûte, ce qui viderait le problème de son sens. Il doit donc passer un accord avec l'agent spécifiant, outre la tâche à accomplir, les modalités de rétribution de l'agent, accord que ce dernier est libre d'accepter ou de refuser. Une fois formalisé, cet accord prend la forme d'un contrat entre les deux parties.

2. Exemple : régulation d'un monopole public

les données de l'économie

■ un principal veut faire produire un bien à un agent. q unités produites lui rapportent q et le coût de l'agent est de $\frac{1}{\theta}q^2$.

résolution en information symétrique

- ▶ le principal (en situation de monopole) donne un *transfert* $t = \frac{1}{\theta}q^2$ à l'agent et reçoit alors le paiement $\pi = q - \frac{1}{2\theta}q^2$
- ▶ le principal choisit $q^* = \theta$ donne $t^* = \frac{\theta}{2}$ et gagne $\pi^* = \frac{\theta}{2}$
- ▶ Dans ce modèle, choisir q^* et t^* rend le principal maître du jeu.

problème en information Asymétrique

- que peut faire le principal si $\theta \in \{\bar{\theta} > \underline{\theta}\}$, avec équiprobabilité
- ▶ le principal choisit de donner à choisir entre $\{(\bar{q}, \bar{t}), (q, t)\}$
 - Impossibilité de donner le first best : calculer le mécanisme optimal, tel que l'agent choisit le contrat lui étant destiné qui maximise le profit.
 - ▶ vérifier qu'il donne plus à l'agent le plus productif,

Mecanism design (1) de l'exemple : les contraintes

- les contraintes de révélation sur les contrats (\bar{q}, \bar{t}) et $(\underline{q}, \underline{t})$

chaque type choisit le contrat lui étant destiné si

$$\bar{t} - \frac{1}{2\theta} \bar{q}^2 \geq \underline{t} - \frac{1}{2\theta} \underline{q}^2 \quad (\text{R}\bar{\theta})$$

$$\bar{t} - \frac{1}{2\theta} \bar{q}^2 \leq \underline{t} - \frac{1}{2\theta} \underline{q}^2 \quad (\text{R}\underline{\theta})$$

- les contraintes de participation sur les contrats (\bar{q}, \bar{t}) et $(\underline{q}, \underline{t})$

les agents acceptent les contrats s'ils leur assurent un bénéfice minimal

$$\bar{t} - \frac{1}{2\theta} \bar{q}^2 \geq 0 \quad (\text{P}\bar{\theta})$$

$$0 \leq \underline{t} - \frac{1}{2\theta} \underline{q}^2 \quad (\text{P}\underline{\theta})$$

Mecanism design (2) : les propriétés des contrats

Première propriété : production croissante avec la productivité

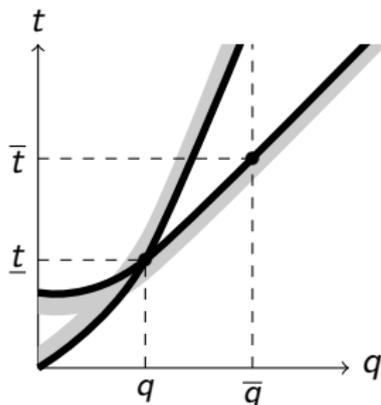
- $R\bar{\theta}$ et $R\underline{\theta}$ s'écrit : $\frac{1}{2\bar{\theta}}[\bar{q}^2 - \underline{q}^2] \leq \bar{t} - \underline{t} \leq \frac{1}{2\underline{\theta}}[\bar{q}^2 - \underline{q}^2]$. Or, puisque $\frac{1}{2\bar{\theta}} < \frac{1}{2\underline{\theta}}$
- nécessairement les trois membres sont positifs, cad $\bar{t} \geq \underline{t}$ et $\bar{q} \geq \underline{q}$

Seconde propriété : $P\bar{\theta}$ saturée

- On peut ordonner les deux membres de droite de $R\bar{\theta}$ et $R\underline{\theta}$: $\underline{t} - \frac{1}{2\bar{\theta}}\underline{q}^2 > \underline{t} - \frac{1}{2\underline{\theta}}\underline{q}^2$. Il en résulte que $P\bar{\theta}$ n'est jamais saturée. Or à l'évidence, à l'optimum,
- une des deux contraintes est saturée ($\Rightarrow \underline{\theta}$), sinon, on pourrait réduire chacun des deux transferts, de ε , sans violer les contraintes de révélation : $\underline{t} = \frac{1}{2\underline{\theta}}\underline{q}^2$

Troisième propriété : $R\bar{\theta}$ saturée

- On représente les objectifs des deux types dans un espace q, t : Le type $\underline{\theta}$ a une utilité $\underline{U} = t - \frac{1}{2\underline{\theta}}q^2$, de pente $q / \underline{\theta}$, et le type $\bar{\theta}$, $\bar{U} = t - \frac{1}{2\bar{\theta}}q^2$, de pente plus faible $q / \bar{\theta}$.
- On représente $(\underline{q}, \underline{t})$ sur $t - \frac{1}{2\underline{\theta}}q^2 = 0$, les parties grisées représentent les contraintes de révélation,
- On représente alors un \bar{q} "compatible". Si le principal minimise \bar{t} , il choisit (\bar{q}, \bar{t}) "en bas", sur la contrainte $R\bar{\theta}$.



Mecanism design (3) : Arbitrage du principal

D'après le graphique précédent, le contrat obtenu par le type $\underline{\theta}$ dépend immédiatement du niveau de la rente informationnelle de $\bar{\theta}$. On donnera donc plus de rente à $\bar{\theta}$ si on espère pouvoir faire plus de profit sur $\underline{\theta}$.

Quatrième propriété : sous production de $\underline{\theta}$, production optimale de $\bar{\theta}$

- remarquons que pour chaque niveau de profit $\underline{\pi}$ (pour $\underline{\theta}$), on peut associer au plus deux contrats satisfaisant $q - t = \underline{\pi}$ et $t - \frac{1}{2\bar{\theta}}q^2 = 0$, de part et d'autres de la valeur $q = \underline{\theta}$ optimale. Il n'y a lieu de considérer que la solution induit une moindre rente informationnelle pour $\bar{\theta}$ cad pour $q \leq \underline{\theta}$.
- Il est alors immédiat qu'en ce point $(\underline{q}, \underline{t})$, la pente de la courbe d'indifférence de l'agent de type $\bar{\theta}$ est inférieure à 1, et que le principal, contraint de se déplacer sur cette courbe d'indifférence augmente ses profits s'il l'incite à augmenter sa prod. Ceci, jusqu'à $\bar{q} = \bar{\theta}$.

Résolution de l'exemple

l'arbitrage du principal, la solution

- ▶ Son profit s'écrit $\pi = \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{t}) + \frac{1}{2}(\bar{q} - \bar{t})$, droites d'iso-profit de pente 1.
- ▶ qu'il donne ou non un contrat efficace aux $\underline{\theta}$, il en donne un aux $\bar{\theta} : \bar{q} = \bar{\theta}$.
- ▶ Il donne une rente à $\bar{\theta}$ pour pouvoir faire produire $\underline{\theta}$: rente max si $\underline{q} = \underline{\theta}$
- ▶ S'il réduit inefficacités côté $\bar{\theta}$ (cad la rente), il perd production côté $\underline{\theta}$ ($\underline{q} < \underline{q}^*$)
- ▶ le mécanisme est paramétré par $\underline{q} : \bar{t} - \frac{\bar{\theta}}{2} = \frac{1}{2\underline{\theta}}\underline{q}^2 - \frac{1}{2\bar{\theta}}\underline{q}^2$; d'où une fct $\pi(\underline{q})$
- ▶ la solution optimale, après calcul, est $\underline{q}^{**} = \underline{\theta} \left[\frac{\bar{\theta}}{2\bar{\theta} - 2\underline{\theta}} \right] < \underline{\theta} = \underline{q}^*$.

Description de l'équilibre

Ce que produit l'équilibre

- ▶ Un niveau de production optimale, contingent à θ : \underline{q}, \bar{q}
- ▶ Un mécanisme de transfert, \underline{t}, \bar{t} , pour l'*implémenter*
- ▶ Note : toute l'information est révélée (\Leftarrow rentes)

Le mécanisme de l'équilibre

- ▶ Le principal s'engage sur (l'offre) des contrats $\{(\bar{q}, \bar{t}), (\underline{q}, \underline{t})\}$

- ▶ En réponse (au mécanisme) les agents ont une stratégie dominante

Un mécanisme alternatif aux mêmes effets

- ▶ Les agents révèlent dans un premier temps leur θ .

- ▶ L'offre du principal est contingente à θ :
$$\underline{\theta} \mapsto \{(\underline{q}, \underline{t})\} \quad \bar{\theta} \mapsto \{(\bar{q}, \bar{t})\}$$

3. Mécanisme et engagement

- Cette description d'un échange d'information et de recommandation n'a d'intérêt que s'ils produisent quelque chose. Ils produisent un effet s'ils sont crédibles, c'est-à-dire que la séquence est connue par tous les joueurs et lorsque le principal est capable de se LIER à cette séquence. On appelle Mécanisme la mise en place de telles règles de communication.

- On parlera de contrat pour souligner cet aspect d'engagement du principal

Implémentation et Mécanisme optimal

Mécanisme optimal

- ▶ Le niveau de production optimale, contingent à θ : \underline{q}, \bar{q}

Implémentation (parfois un problème indépendant)

- ▶ Quels sont les contrats qui permettent d'implémenter \underline{q}, \bar{q} ?

- ▶ *Ex Ante*, le principal s'engage sur des contrats sur lesquels il ne pourra pas revenir après. C'est

$$\{\underline{\theta} \mapsto \{(\underline{q}, \underline{t})\} ; \bar{\theta} \mapsto \{(\bar{q}, \bar{t})\}\}$$

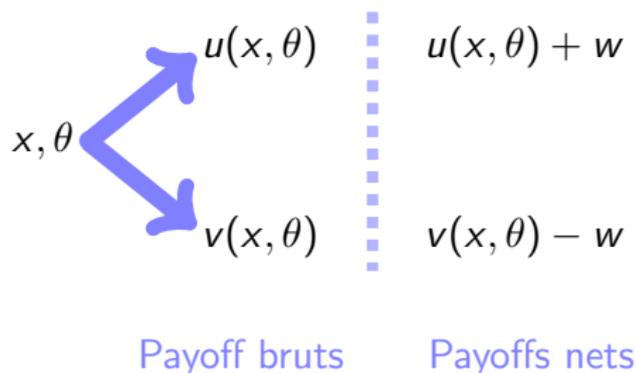
- ▶ Les agents révèlent dans un premier temps leur θ . Ils le font ayant l'assurance que les principaux se tiendront aux contrats auxquels ils se sont engagés.

- ▶ La recommandation du principal est alors contingente à θ :

$$\underline{\theta} \mapsto (\underline{q}, \underline{t}) \quad ; \quad \bar{\theta} \mapsto (\bar{q}, \bar{t})$$

Le même exemple revisité

Un joueur P décide d'une transaction avec un agent, portant sur $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ et sur $w \in \mathbb{R}$. L'agent a une information privée θ qui affecte à la fois ses préférences et le bénéfice du joueur P .



- ▶ A ce stade de la modélisation, le joueur P a le pouvoir de choisir w et x sans toutefois connaître θ , mais la distribution $F(\theta)$. On pourrait analyser cette interaction comme un jeu bayésien.
- ▶ Mais, si P est un principal, il peut tenter d'extraire un peu d'information et décider par la suite de x et de θ .
- ▶ Pour ce faire, il peut se lier à un contrat.
- ▶ Un contrat (ou un mécanisme) est un jeu caractérisé par un ensemble de stratégie de reporting Θ et de recommandations $(w(\cdot), x(\cdot)) : \Theta \rightarrow X \times \mathbb{R}$,
- ▶ cad le principal impose un ensemble de messages possibles, Θ (le refus de répondre pouvant être dans Θ) et donne la règle du jeu.

4. L'exemple classique des biens publics

On considère une économie où coexistent deux consommateurs, A et B, dont le niveau de satisfaction dépend de deux biens, un bien privé noté X et un bien public noté Z : $U_A = X_A Z_A^{\theta_A}$ et $U_B = X_B Z_B^{\theta_B}$. Il n'existe initialement que du bien X . Le bien public Z est produit par un "centre" suivant la technique : $Z_C = F(X_C) = X_C$.

- ▶ Question normative : Quelles sont les allocations optimales de Pareto ?
- ▶ Question d'implémentation : Comment financer ce bien public : Existe-t'il des systèmes de transfert des agents vers le centre pour que l'allocation optimale soit réalisable. Quels sont les critères alternatifs ?
- ▶ Au stade zéro de la modélisation, on suppose que le joueur C peut choisir Z mais ne connaît pas individuellement les types A et B, le rendant incapable de faire des transferts contingent aux types.
- ▶ Si C est un principal, il n'a pas assez d'instruments pour extraire l'information et décider par la suite de t_A et t_B . En effet, ici, puisque $Z_A = Z_B$, les contraintes de révélation impliquent toujours $t_A = t_B$.
- ▶ Si on abandonne l'idée d'un contrat centralisés, il existe bien des équilibres de souscriptions, chaque type déclarant S_A et S_B , et C produisant $Z = S_A + S_B$, mais ils sont inefficaces.

5. Mécanisme et stratégies des agents

L'exemple précédent suggère qu'il pourrait être intéressant que le mécanisme instauré par le principal dépende des reporting de l'ensemble des agents, c-à-d un mécanisme de la forme $M : \theta \mapsto (m_1(\theta), m_2(\theta), \dots, m_n(\theta))$ où $m_i(\theta)$ est le contrat de l'agent i contingent à l'ensemble des annonces $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.

- On dit que le mécanisme est en stratégie dominante si étant donné le mécanisme M , la réponse optimale de l'agent est indépendante des stratégies de réponse des autres agents. L'équilibre est obtenu élimination des stratégies strictement dominées.
- On dit que le mécanisme est Bayésien si étant donné le mécanisme M , la réponse optimale de l'agent dépend des stratégies de réponse des autres agents. Les agents jouent alors un équilibre Bayésien.

6. Le mécanisme de Clarke - Groves

Financement du bien public

si le centre peut IMPOSER un système de transfert contingent aux annonces

- n agents, de type agrégé $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, privé
- Z , à produire. Des transferts t_i , du principal vers l'agent i .
- ▶ Les transferts $t_i(\theta)$ vont dépendre de l'ensemble des annonces.
- Utilités quasi-linéaires des agents : $u_i(z, t_i, \theta_i) = v_i(z, \theta_i) + t_i$.
- Coût de production du bien public $v_0(z) = -\text{Cost}(z)$

La quantité efficace de bien public

- ▶ c'est toute quantité z^* qui maximise l'objectif social $\sum_{i=0}^n v_i(q, \theta_i)$
- ▶ Remarquez que cet objectif dépend de la valeur réalisée de θ : $z^*(\theta)$.

Le mécanisme de Clarke - Groves

- ▶ Supposez que le principal décide du niveau de bien public $z^*(\theta)$ et qu'il puisse imposer le système de transfert contingent à θ
- ▶ et que ces transferts dépende des annonces des autres et du z^* présumé suivant le schéma $\forall i \quad t_i(\hat{\theta}) = \sum_{j \neq i} v_j(z^*(\hat{\theta}), \theta_j) - T$
- ▶ où T est une constante et $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)$ la valeur annoncée
- ▶ Note : si l'on anticipe que tous répondent leur vrai type, alors i a lui aussi intérêt à répondre son type et il obtient comme utilité l'objectif social. T peut être une fonction pour \pm balancer le budget.

Clarke - Groves : AN

Construction d'un pont, d'une piscine ...

- $z = 1$: construction
- $z = 0$: projet abandonné
- $i = 1, \dots, n$: $u_i(z, t_i, \theta_i) = t_i + \theta_i q$: θ_i , le consentement à payer.
- $v_0 = -cz$, le coût de la construction

La quantité efficace de bien public

- ▶ le surplus total est ici $\sum_i (\theta_i - c)z$
- ▶ la piscine devrait être construite only si $\sum_i \theta_i \geq c$.

Le mécanisme de Clarke - Groves

- ▶ $\forall i \quad t_i(\hat{\theta}) = \sum_{j \neq i} [\hat{\theta}_j] - c \quad \text{si } \sum_i \theta_i \geq c$

- ▶ Note : ce mécanisme permet que chacun révèle sa disposition à payer et donc de prendre efficacement la décision ou non de construire le bien public. Cependant ce mécanisme n'est pas balancé.