

# Affectation dans un secteur quadri-collèges

Julien Grenet  
CNRS et École d'économie de Paris  
4 décembre 2018

L'affectation dans un secteur quadri-collèges peut être réalisée au moyen d'une procédure de choix régulé.

Une procédure de choix régulé comporte trois éléments distincts :

- (1) la **capacité d'accueil** de chaque collège ;
- (2) les **vœux d'affectation** des parents, c'est-à-dire leur classement des collèges par ordre de préférence ;
- (3) des **règles de priorité** qui déterminent, si la demande pour un collège est supérieure au nombre de places, les priorités relatives des élèves.

Muni de ces éléments, un **algorithme** détermine le collège d'affectation de chaque élève, en fonction des préférences exprimées par les parents et des règles de priorité.

## **1. La capacité d'accueil des collèges**

Pour atteindre un objectif de mixité sociale, les places de chaque collège sont réparties entre les différents groupes sociaux de manière à correspondre à la répartition observée à l'échelle du secteur quadri-collèges.

L'ensemble des élèves participant à la procédure d'affectation peuvent par exemple être répartis entre quatre groupes sociaux de taille égale en fonction de leur quotient familial (QF). Si, par exemple, le secteur compte 400 élèves, chaque groupe social (numéroté de 1 à 4, du QF le plus faible au QF le plus élevé) comptera 100 élèves.

Les places de chaque collège sont alors équi-réparties entre les 4 groupes de QF. Par exemple, si chaque collège a une capacité d'accueil de 100, les places pourront être réparties comme suit :

- QF1 : 25 places
- QF2 : 25 places
- QF3 : 25 places
- QF4 : 25 places

## 2. Les vœux d'affectation

Les parents formulent des vœux d'affectation pour les différents collèges du secteur, qui sont classés par ordre de préférence.

Exemple de vœux :

- vœu n°1 : collège B
- vœu n°2 : collège C
- vœu n°3 : collège A
- vœu n°4 : collège D

## 3. Les règles de priorité

Les élèves des différents groupes de QF candidatent uniquement pour les places qui leurs sont réservées dans chaque collège. Si, au sein d'un groupe de QF donné, la demande pour un collège est supérieure à au nombre de places réservées aux élèves de ce groupe, on applique des critères de priorité pour départager les élèves.

Trois critères sont successivement appliqués :

1. handicap ;
2. rapprochement de fratrie ;
3. distance relative domicile-collège.

Pour un collège donné, priorité est donnée aux élèves en situation de handicap, puis aux élèves ayant un frère ou une sœur déjà scolarisé(e) dans l'établissement et, enfin, aux élèves qui résident relativement plus près du collège demandé<sup>1</sup>.

### Calcul du critère de distance relative :

La distance relative entre un élève  $i$  et un collège  $j$  est calculée comme la différence (en mètres) entre deux distances (qui sont calculées à l'aide de Google Maps) :

- la distance entre le domicile de l'élève  $i$  et le collège  $j$ , notée  $d_{ij}$  ;
- la distance entre le domicile de l'élève  $i$  et l'alternative la plus proche, notée  $d_{ik}$ .

L'alternative la plus proche est soit le collège le plus proche du domicile de l'élève (si le collège  $j$  n'est pas le plus proche), soit le 2<sup>e</sup> collège le plus proche (si le collège  $j$  est le plus proche).

La distance relative de l'élève  $i$  au collège  $j$  se calcule donc comme  $d_{ij} - d_{ik}$ .

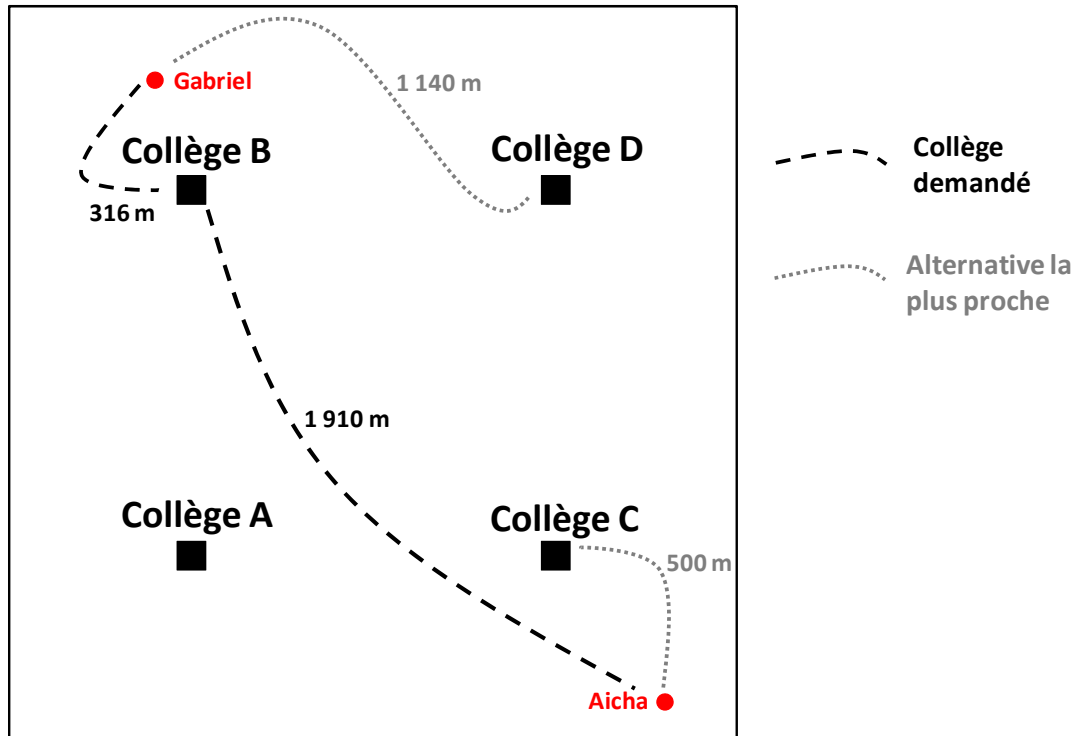
Priorité est donnée pour le collège  $j$  à l'élève ayant la plus faible distance relative à ce collège.

Le calcul de la distance relative est illustré à l'aide des trois exemples qui suivent.

---

<sup>1</sup> Si deux élèves ont le même critère de distance relative (cas rare), le QF peut être utilisé comme critère de priorité résiduel pour départager les ex-æquo (en donnant priorité à l'élève ayant le QF le plus faible).

### Exemple 1 : Distance relative au collège B



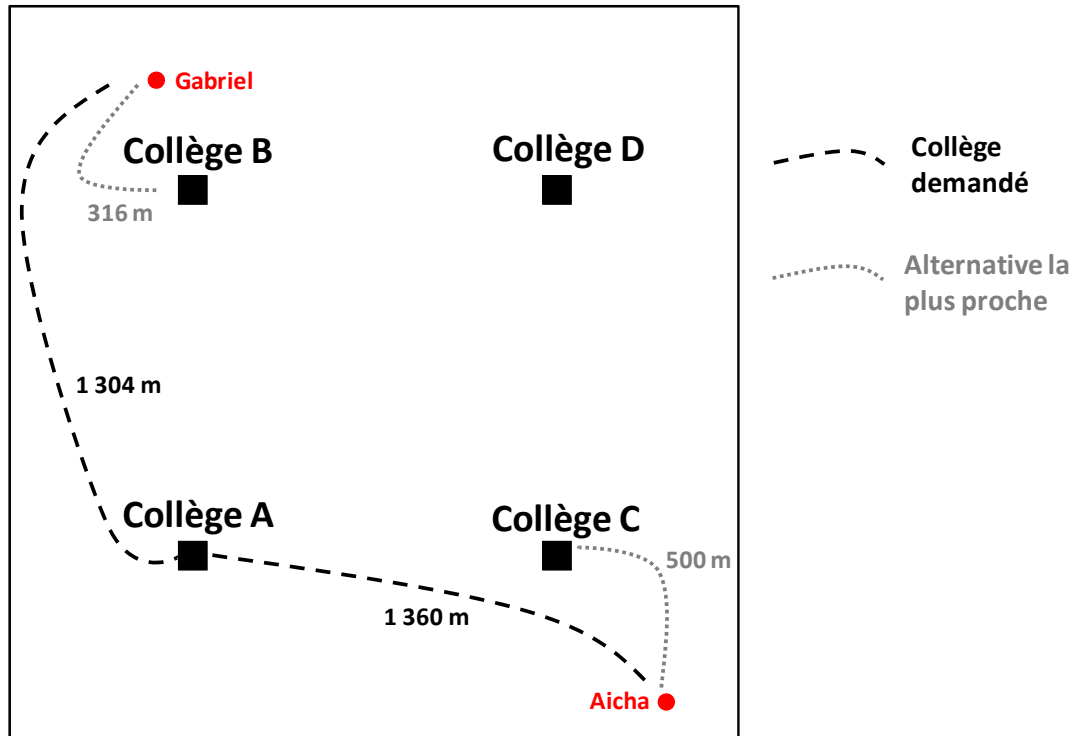
→ Pour le collège B, Gabriel a priorité sur Aicha.

Calcul des distances relatives au collège B :

- Gabriel réside à 316 m du collège B. L'alternative la plus proche est le collège D, situé à 1 140 m de son domicile. La distance relative de Gabriel par rapport au collège B est donc égale à  $316 - 1140 = -824$  m.
- Aicha réside à 1 910 m du collège B. L'alternative la plus proche est le collège C, situé à 500 m de son domicile. La distance relative d'Aicha par rapport au collège B est donc égale à  $1\,910 - 500 = 1\,410$  m.

Puisque  $-824 < 1910$ , Gabriel vit relativement plus près du collège B qu'Aicha (par rapport à leur alternative respective la plus proche). Priorité est donc donnée à Gabriel pour ce collège.

## Exemple 2 : Distance relative au collège A



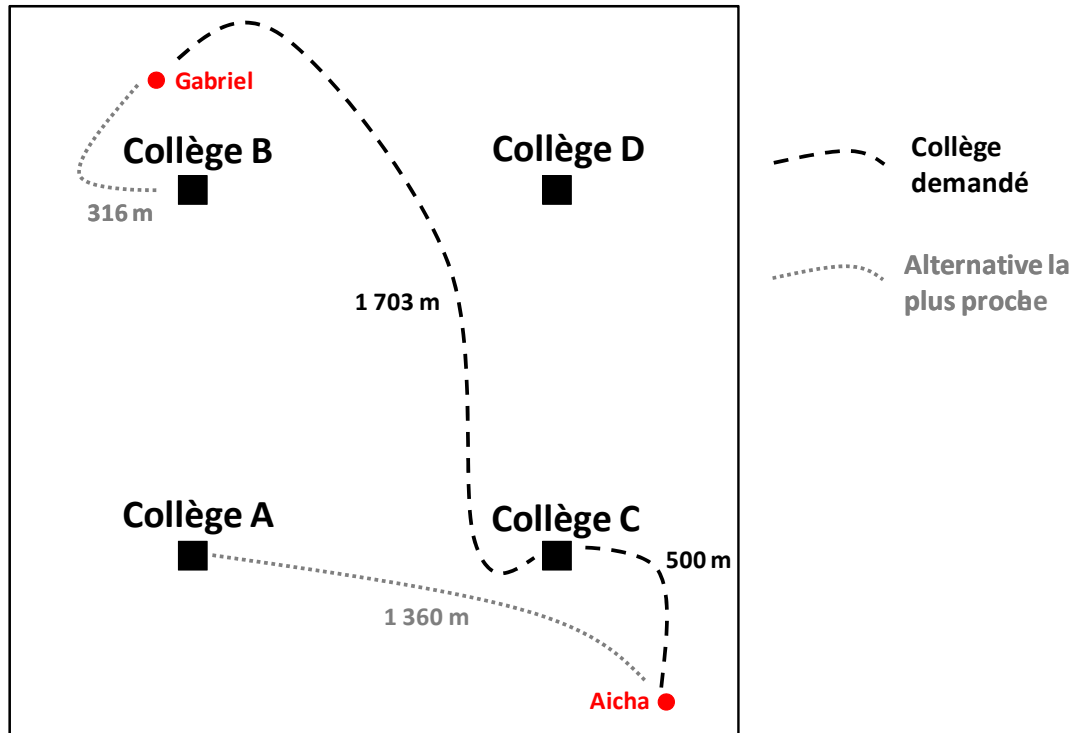
→ Pour le collège A, Aïcha a priorité sur Gabriel.

Calcul des distances relatives au collège A :

- Aïcha réside à 1 360 m du collège A. L'alternative la plus proche est le collège C, situé à 500 m de son domicile. La distance relative d'Aïcha par rapport au collège A est donc égale à  $1360 - 500 = 860$  m.
- Gabriel réside à 1 304 m du collège A. L'alternative la plus proche est le collège B, situé à 316 m de son domicile. La distance relative de Gabriel par rapport au collège A est donc égale à  $1304 - 316 = 988$  m.

Puisque  $860 < 988$ , Aïcha vit relativement plus près du collège A que Gabriel (par rapport à leur alternative respective la plus proche). Priorité est donc donnée à Aïcha pour ce collège.

### Exemple 3 : Distance relative au collège C



→ Pour le collège C, Aicha a priorité sur Gabriel.

Calcul des distances relatives au collège C :

- Aicha réside à 500 m du collège C. L'alternative la plus proche est le collège A, situé à 1 360 m de son domicile. La distance relative d'Aicha par rapport au collège C est donc égale à  $500 - 1360 = -860$  m.
- Gabriel réside à 1 703 m du collège C. L'alternative la plus proche est le collège B, situé à 316 m de son domicile. La distance relative de Gabriel par rapport au collège C est donc égale à  $1703 - 316 = 1387$  m.

Puisque  $-860 < 1387$ , Aicha vit relativement plus près du collège C que Gabriel (par rapport à leur alternative respective la plus proche). Priorité est donc donnée à Aicha pour ce collège.

#### 4. L'algorithme d'affectation

L'algorithme utilisé pour affecter les élèves aux collèges est l'**algorithme d'acceptation différée** de Gale et Shapley<sup>2</sup>, dans sa version dite « avec précedence aux élèves ». Cet algorithme est l'un des plus communément utilisés à travers le monde pour réguler les choix scolaires, dans la mesure où il présente trois « bonnes » propriétés :

1. Cet algorithme **respecte les priorités** : aucun élève ne peut contester son affectation au motif qu'il se serait vu refuser l'admission dans un collège au profit d'un élève ayant une priorité plus faible.
2. L'affectation obtenue **satisfait « au mieux » les préférences des familles** au sens où il n'est pas possible de trouver une autre affectation qui améliorerait la satisfaction d'un élève sans réduire celle d'un autre (tout en respectant les priorités).
3. Enfin, l'algorithme **n'est pas « manipulable »** : la meilleure stratégie consiste à classer ses vœux sincèrement, c'est-à-dire par ordre de préférence réel. Il n'y a rien à gagner à manipuler l'ordre de ses vœux.

##### Fonctionnement de l'algorithme

Chaque élève candidate uniquement sur les places réservées à son groupe de QF. L'affectation est automatisée et procède en considérant chaque groupe de QF séparément.

Considérons par exemple les élèves du groupe de quotient familial QF1. Soit  $N$  le nombre de places réservées à ce groupe social dans chacun des quatre collèges. L'algorithme procède par itération successives, de la manière suivante :

**Étape 1** : chaque élève « candidate » sur le collège qu'il a classé en 1<sup>er</sup> vœu. Dans chaque collège, les candidats sont classés par ordre de priorité en fonction des trois critères de handicap, de rapprochement de fratrie et de distance relative. Chaque collège admet provisoirement les élèves les mieux classés dans la limite des  $N$  places disponibles et refuse les autres.

**Étape 2** : chacun des élèves refusés à l'étape 1 « candidate » sur le collège qu'il a classé en 2<sup>e</sup> vœu. Chaque collège considère conjointement ces nouveaux candidats et les élèves éventuellement acceptés à l'étape 1, en les classant par ordre de priorité. Chaque collège admet provisoirement les élèves les mieux classés dans la limite des places disponibles et refuse les autres (un élève admis à l'étape 1 peut donc être refusé à l'étape 2).

**Étape  $k$**  : chacun des élèves refusés à l'étape  $k-1$  « candidate » sur le collège le mieux classé parmi ceux auxquels il n'a pas encore candidaté. Chaque collège considère conjointement ces nouveaux candidats et les élèves précédemment acceptés, en les classant par ordre de priorité. Chaque collège admet provisoirement les élèves les mieux classés dans la limite des places disponibles et refuse les autres (un élève admis à l'étape  $k-1$  peut donc être refusé à l'étape  $k$ ).

L'algorithme converge au bout d'un « nombre fini d'itérations, lorsque plus aucun élève n'est refusé. L'affectation est alors définitive.

---

<sup>2</sup> David Gale et Lloyd Shapley (1962) « College Admissions and the Stability of Marriage », *American Mathematical Monthly*, vol. 69, p. 9-15.

## 5. Exemple d'application de l'algorithme d'affectation

Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme d'affectation, on considère le cas fictif d'un secteur comportant 4 collèges (notés A, B, C et D) et 8 élèves qui sont équi-répartis en deux groupes de QF (notés QF1 et QF2).

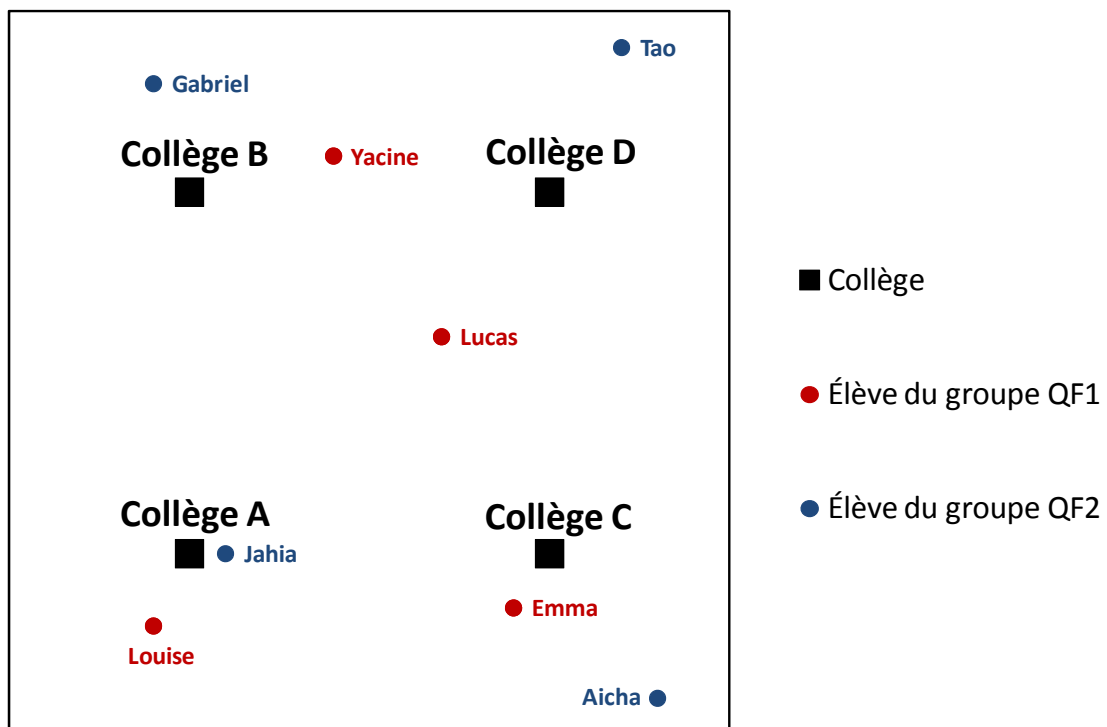
Le tableau 1 indique le groupe de QF des 8 élèves du secteur.

Tableau 1 : Groupe de QF des 8 élèves à affecter dans le secteur quadri-collèges

Élève	Groupe de QF
Louise	QF1
Yacine	QF1
Emma	QF1
Lucas	QF1
Jahia	QF2
Gabriel	QF2
Aicha	QF2
Tao	QF2

La figure 1 montre la répartition spatiale des collèges et des élèves dans le secteur.

Figure 1 : Répartition spatiale des collèges et des élèves du secteur quadri-collèges



### a) Capacité d'accueil des collèges

Chaque collège a une capacité d'accueil de 2 places : une place est réservée aux élèves du groupe QF1 et l'autre place est réservée aux élèves du groupe QF2, comme indiqué dans le tableau 2.

**Tableau 2 : capacité d'accueil des collèges**

Collège	Capacité totale	Nombre de places réservées aux élèves du groupe QF1	Nombre de places réservées aux élèves du groupe QF2
Collège A	2	1	1
Collège B	2	1	1
Collège C	2	1	1
Collège D	2	1	1

### b) Vœux d'affectation

Le tableau 3 indique les vœux d'affectation des 8 élèves du secteur.

**Tableau 3 : Vœux d'affectation dans le secteur quadri-collèges**

Élève	Vœu n°1	Vœu n°2	Vœu n°3	Vœu n°4
Louise	Collège B	Collège C	Collège A	Collège D
Yacine	Collège C	Collège A	Collège B	Collège D
Emma	Collège A	Collège B	Collège C	Collège D
Lucas	Collège A	Collège B	Collège D	Collège C
Jahia	Collège D	Collège A	Collège C	Collège B
Gabriel	Collège B	Collège A	Collège D	Collège C
Aicha	Collège C	Collège D	Collège B	Collège A
Tao	Collège B	Collège D	Collège A	Collège C

### c) Critères de priorité

Le tableau 4 indique les élèves en situation de handicap et les élèves qui bénéficient d'une priorité au titre du rapprochement de fratrie

**Tableau 4 : Handicap et rapprochement de fratrie**

Élève	Handicap ?	Frère ou sœur dans le collège ?			
		Collège A	Collège B	Collège C	Collège D
Louise	-	-	Oui	-	-
Yacine	-	-	-	-	-
Emma	Oui	-	-	-	-
Lucas	-	-	-	-	-
Jahia	-	-	-	-	-
Gabriel	-	-	-	-	-
Aicha	-	-	-	-	-
Tao	-	-	-	-	Oui



Le tableau 5 indique la distance séparant le domicile de chaque élève par rapport à chacun des 4 collèges du secteur.

**Tableau 5 : Distances domicile-collège**

Élève	Collège A	Collège B	Collège C	Collège D
Louise	224 m	1 204 m	1 118 m	1 628 m
Yacine	1 170 m	412 m	1 253 m	608 m
Emma	912 m	1 460 m	180 m	1 154 m
Lucas	922 m	806 m	671 m	500 m
Jahia	100 m	1 005 m	900 m	1 345 m
Gabriel	1 304 m	316 m	1 703 m	1 140 m
Aicha	1 360 m	1 910 m	500 m	1 432 m
Tao	1 844 m	1 265 m	1 414 m	447 m

#### **d) Classement des élèves par ordre de priorité**

Au sein de chaque groupe de QF, les élèves sont classés par ordre de priorité en fonction des critères de handicap, de rapprochement de fratrie et de distance relative.

##### **- Priorités des 4 élèves du groupe QF1**

Le tableau 6a indique le classement par ordre de priorité des élèves du groupe QF1 :

- Emma est toujours en tête du classement des priorités du fait du critère de handicap ;
- Louise est classé en 2<sup>e</sup> position pour le collège B (derrière Emma) parce qu'elle a un frère ou une sœur dans l'établissement (critère de rapprochement de fratrie) ;
- les autres élèves sont classés en fonction de leur distance relative au collège (priorité étant donnée à l'élève ayant la distance relative la plus faible pour le collège).

Exemple de calcul de distance relative : Yacine réside à 1 170 m du collège A ; l'alternative la plus proche est le collège B, situé à 412 m de son domicile. Sa distance relative au collège A est donc égale à  $1170 - 412 = 758$  m.

##### **- Priorités des 4 élèves du groupe QF2**

Le tableau 6b indique le classement par ordre de priorité des élèves du groupe QF2 :

- Tao est classé en 1<sup>ère</sup> position pour le collège D du fait du critère de rapprochement de fratrie ;
- les autres élèves sont classés en fonction de leur distance relative au collège (priorité étant donnée à l'élève ayant la distance relative la plus faible pour le collège).

Exemple de calcul de distance relative : Jahia réside à 100 m du collège A ; l'alternative la plus proche est le collège C, situé à 900 m de son domicile. Sa distance relative au collège A est donc égale à  $100 - 900 = -800$  m.

**Tableau 6a : Classement des élèves du groupe QF1 par ordre de priorité**

Collège	Élève	Handicap ?	Rapprochement de fratrie ?	Distance Au collège (1)	Distance à l'alternative la plus proche (2)	Distance relative = (1) – (2)	Ordre de priorité pour le collège
Collège A	Emma	Oui	-	912 m	180 m	732 m	1
Collège A	Louise	-	-	224 m	1 118 m	-894 m	2
Collège A	Lucas	-	-	922 m	500 m	422 m	3
Collège A	Yacine	-	-	1 170 m	412 m	758 m	4
Collège B	Emma	Oui	-	1 460 m	180 m	1 280 m	1
Collège B	Louise	-	Oui	1 204 m	224 m	991 m	2
Collège B	Yacine	-	-	412 m	608 m	-196 m	3
Collège B	Lucas	-	-	806 m	500 m	306 m	4
Collège C	Emma	Oui	-	180 m	912 m	-732 m	1
Collège C	Lucas	-	-	671 m	500 m	171 m	2
Collège C	Yacine	-	-	1 253 m	412 m	841 m	3
Collège C	Louise	-	-	1 118 m	224 m	894 m	4
Collège D	Emma	Oui	-	1 154 m	180 m	974 m	1
Collège D	Lucas	-	-	500 m	671 m	-171 m	2
Collège D	Yacine	-	-	608 m	712 m	196 m	3
Collège D	Louise	-	-	1 628 m	224 m	1404 m	4

**Tableau 6b : Classement des élèves du groupe QF2 par ordre de priorité**

Collège	Élève	Handicap ?	Rapprochement de fratrie ?	Distance Au collège (1)	Distance à l'alternative la plus proche (2)	Distance relative = (1) – (2)	Ordre de priorité pour le collège
Collège A	Jahia	-	-	100 m	900 m	-800 m	1
Collège A	Aïcha	-	-	1 360 m	500 m	860 m	2
Collège A	Gabriel	-	-	1 304 m	316 m	988 m	3
Collège A	Tao	-	-	1 844 m	447 m	1 397 m	4
Collège B	Gabriel	-	-	316 m	1 140 m	-824 m	1
Collège B	Tao	-	-	1 265 m	447 m	818 m	2
Collège B	Jahia	-	-	1 005 m	100 m	905 m	3
Collège B	Aïcha	-	-	1 910 m	500 m	1 410 m	4
Collège C	Aïcha	-	-	500 m	1 360 m	-860 m	1
Collège C	Jahia	-	-	900 m	100 m	800 m	2
Collège C	Tao	-	-	1 414 m	447 m	967 m	3
Collège C	Gabriel	-	-	1 703 m	316 m	1 387 m	4
Collège D	Tao	-	Oui	447 m	1 265 m	-818 m	1
Collège D	Gabriel	-	-	1 140 m	316 m	824 m	2
Collège D	Aïcha	-	-	1 432 m	500 m	932 m	3
Collège D	Jahia	-	-	1 345 m	100 m	1245 m	4

## e) Application de l'algorithme

### - Affectation des 4 élèves du groupe QF1

Les 4 élèves du groupe QF1 sont affectés sur les 4 places qui leur sont réservées dans les 4 collèges (une place par collège).

#### **Étape 1 :**

- Chaque élève candidate sur son 1<sup>er</sup> vœu (cf. tableau 3) : Louise demande le collège B, Yacine le collège C, Emma le collège A et Lucas le collège A ;
- Louise est provisoirement affectée au collège B et Yacine au collège C (puisque'il n'y a à chaque fois qu'une demande pour une place) ; pour départager Emma et Lucas qui demandent tous les deux le collège A (qui n'a qu'une seule place), on applique les critères de priorité : Emma a priorité sur Lucas car elle est en situation de handicap. Emma est donc provisoirement affectée au collège A et Lucas est refusé.

Affectation provisoire à l'issue de l'étape 1 :

Louise : collège B ; Yacine : collège C ; Emma : collège A ; Lucas : non affecté

#### **Étape 2 :**

- Lucas, refusé sur son 1<sup>er</sup> vœu à l'étape 1, candidate sur son 2<sup>e</sup> vœu (collège B) ;
- Le collège B compare les priorités de Lucas (nouveau candidat) et de Louise (admise à l'étape précédente) : Louise a priorité sur Lucas du fait du critère de rapprochement de fratrie. Louise reste donc affectée provisoirement dans le collège B tandis que Lucas est refusé.

Affectation provisoire à l'issue de l'étape 2 :

Louise : collège B ; Yacine : collège C ; Emma : collège A ; Lucas : non affecté

#### **Étape 3 :**

- Lucas, refusé sur son 2<sup>e</sup> vœu à l'étape 2, candidate sur son 3<sup>e</sup> vœu (collège D) ;
- Lucas est admis dans le collège D car il n'y a pas d'autre candidat pour ce collège.

L'affectation finale est donc :

Louise : collège B ; Yacine : collège C ; Emma : collège A ; Lucas : collège D

### - Affectation des 4 élèves du groupe QF2

Les 4 élèves du groupe QF2 sont affectés sur les 4 places qui leur sont réservées dans les 4 collèges (une place par collège).

#### **Étape 1 :**

- Chaque élève candidate sur son 1<sup>er</sup> vœu (cf. tableau 3) : Jahia demande le collège D, Gabriel le collège B, Aicha le collège C et Tao le collège B ;
- Jahia est provisoirement affectée au collège D et Aicha au collège C (puisque'il n'y a à chaque fois qu'une demande pour une place) ; pour départager Gabriel et Tao qui demandent tous les deux le collège B, on applique les critères de priorité : aucun des deux élèves n'ayant de priorité au titre du handicap ou du rapprochement de fratrie, on applique le critère de distance relative.

Gabriel a priorité sur Tao car sa distance relative par rapport au collège B est de  $-824$  m contre  $818$  m pour Tao. Gabriel est donc provisoirement affecté au collège B tandis que Tao est refusé.

Affectation provisoire à l'issue de l'étape 1 :

Jahia : collège D ; Gabriel : collège B ; Aicha : collège C ; Tao : non affecté.

**Étape 2 :**

- Tao, refusé sur son 1<sup>er</sup> vœu à l'étape 1, candidate sur son 1<sup>e</sup> vœu (collège D)
- Le collège D compare les priorités de Tao (nouveau candidat) et de Jahia (admise à l'étape précédente) : Tao a priorité sur Jahia du fait du critère de rapprochement de fratrie. Tao est donc affecté provisoirement au collège D tandis que Jahia est refusée.

Affectation provisoire à l'issue de l'étape 1 :

Jahia : non affectée ; Gabriel : collège B ; Aicha : collège C ; Tao : collège D.

**Étape 3 :**

- Jahia, refusée sur son 1<sup>er</sup> vœu à l'étape 2, candidate sur son 2<sup>e</sup> vœu (collège A)
- Jahia est admise dans le collège A car il n'y a pas d'autre candidat pour ce collège.

L'affectation finale est donc :

Jahia : collège A ; Gabriel : collège B ; Aicha : collège C ; Tao : collège D.

Le tableau 7 indique l'affectation finale de chaque élève. On vérifie que chacun des 4 collèges du secteur accueille bien un élève de chaque groupe de QF. L'objectif de mixité est donc satisfait.

**Tableau 7 : Affectation finale**

Élève	Groupe de QF	Collège d'affectation
Louise	QF1	Collège B
Yacine	QF1	Collège C
Emma	QF1	Collège A
Lucas	QF1	Collège D
Jahia	QF2	Collège A
Gabriel	QF2	Collège B
Aicha	QF2	Collège C
Tao	QF2	Collège D