TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

Vade mecum : Optimisation statique. Lagrangien et conditions de Kuhn et Tucker

Ce vade mecum expose la méthode de résolution des programmes d'optimisation statique (par opposition aux programmes d'optimisation dynamique qui ne seront pas abordés ici) dans le cas d'une fonction objectif multivariée. Les sections 1 et 2 donnent un certain nombre de définitions préliminaires. Les sections suivantes exposent les méthodes de résolution des quatre grandes catégories de programmes d'optimisation : optimisation sans contraintes (section 3), optimisation sous contraintes prenant la forme d'équations (section 4), optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations (section 5) et optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations incluant des contraintes de non-négativité (section 6).

1 Préambule

1.1 Définitions préliminaires

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$ à valeurs réelles dont l'ensemble de définition U constitue un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On supposera toujours que f est continue et deux fois différentiable.

On note f_i' la dérivée partielle de f par rapport à x_i ($f_i' = \frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}$) ; on note f_{ij}'' la dérivée croisée de f par rapport à x_i et x_j ($f_{ij}'' = \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$)

Déterminant d'une matrice : Le déterminant d'une matrice est défini par induction :

- Une matrice (1,1) est juste un scalaire a. Le déterminant de cette matrice est égal à a.
- Matrice (2,2) : soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le déterminant de M s'écrit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Matrice (n, n) : soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Pour calculer le déterminant de M, il suffit d'utiliser la méthode dite du « développement selon la première ligne » :
  1. on associe à chaque coefficient a_{1i} de la première ligne de la matrice M un signe + si i est impair et un signe - si i est pair.
  2. Le déterminant de M peut s'écrire comme la somme des n déterminants d'ordre $n-1$ obtenus en éliminant de la matrice M la ligne et la colonne contenant le coefficient a_{1i}. Chacun de ces déterminants est multiplié par $(-1)^{1+i} a_{1i}$

Exemple : soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice M s'écrit :

$$\begin{aligned} det(M) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \end{aligned}$$

Mineurs principaux d'une matrice : Soit M une matrice carré symétrique de dimension (n,n). Un mineur principal d'ordre k est le déterminant de la sous-matrice de M d'ordre k obtenue en supprimant $n-k$ lignes et les $n-k$ colonnes correspondantes dans M.

Exemple : soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.
Les trois mineurs principaux d'ordre 1 de M sont a_{11}, a_{22} et a_{33}.
Les trois mineurs principaux d'ordre 2 de M sont : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix}$
Le mineur principal d'ordre 3 de M est : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Mineurs principaux diagonaux d'une matrice : Soit M une matrice carré symétrique de dimension (n,n). Le mineur principal diagonal d'ordre k (noté D_k) de la matrice M est le déterminant de la matrice de taille (k,k) obtenue en éliminant les $n-k$ dernières lignes et $n-k$ dernières colonnes de la matrice M. Une matrice carré d'ordre n admet n mineurs principaux diagonaux.

N.B. : Le mineur principal diagonal d'ordre k d'une matrice est l'un de ses mineurs principaux d'ordre k.
Exemple : soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.
Le mineur principal diagonal d'ordre 1 de M est a_{11}.
Le mineur principal diagonal d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;
le mineur principal diagonal d'ordre 3 est $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Matrice hessienne : On appelle matrice hessienne $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ de f la matrice des dérivées secondes de f évaluées au point $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{12} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $f''_{ij} = f''_{ji}\ \forall(i, j)$, la matrice hessienne de f est une matrice symétrique d 'ordre n.

Matrice hessienne bordée : On appelle matrice hessienne bordée $\overline{H}(x_1, x_2, ..., x_n)$ de f la matrice des dérivées secondes de f, bordée par la matrice des dérivées premières de f :

$$\overline{H}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \hline f'_1 & f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f'_2 & f''_{21} & f''_{12} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_n & f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{array}\right)$$

La matrice hessienne bordée de f est une matrice symétrique carrée d'ordre $n + 1$.

Matrice jacobienne : soit $G = (g_1, g_2, ..., g_m)$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. A tout vecteur $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la fonction G associe le vecteur de fonctions $(g_1(\widetilde{x}), g_2(\widetilde{x}), ..., g_m(\widetilde{x}))$. On appelle matrice jacobienne de G la matrice de dimension (m, n) $J_G(x_1, x_2, ...x_n)$ des dérivées partielles des m fonctions qui composent G :

$$J_G(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\widetilde{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\widetilde{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\widetilde{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\widetilde{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\widetilde{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\widetilde{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\widetilde{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\widetilde{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\widetilde{x}) \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices (semi) définies négatives, matrice (semi) définies positives

Matrice définie positive : Soit M une matrice carrée symétrique. Soit A un vecteur colonne quelconque. On note A' sa transposée. M est dite définie positive si et seulement si :

$$A'MA > 0 \quad \forall A \neq 0$$

N.B. : Les éléments diagonaux a_{ii} d'une matrice définie positive sont tous > 0.

Matrice semi-définie positive : Soit M une matrice carrée symétrique. Soit A un vecteur colonne quelconque. On note A' sa transposée. Une matrice M est dite semi-définie positive si et seulement si :

$$A'MA \geqslant 0 \quad \forall A$$

N.B. : Les éléments diagonaux a_{ii} d'une matrice semi-définie positive sont tous ≥ 0.

Matrice définie négative : Soit M une matrice carrée symétrique. Soit A un vecteur colonne quelconque. On note A' sa transposée. M est dite définie négative si et seulement si :

$$A'MA < 0 \quad \forall A \neq 0$$

N.B. : Les éléments diagonaux a_{ii} d'une matrice définie négative sont tous < 0.

Matrice semi-définie négative : Soit M une matrice carrée symétrique. Soit A un vecteur colonne quelconque. On note A' sa transposée. M est dite semi-définie négative si et seulement si :

$$A'MA \leqslant 0 \quad \forall A$$

N.B. : Les éléments diagonaux a_{ii} d'une matrice semi-définie négative sont tous ≤ 0.

Caractérisation : Soit M une matrice carrée symétrique d'ordre n.

- M définie positive $\Leftrightarrow$ ses n mineurs principaux diagonaux D_k sont > 0.
- M semi-définie positive $\Leftrightarrow$ tous ses mineurs diagonaux (et pas seulement diagonaux !) D_k sont $\geqslant 0$.
- M définie négative $\Leftrightarrow$ ses n mineurs principaux diagonaux D_k sont alternativement < 0 (k impair) et > 0 (k pair).
- M semi-définie négative $\Leftrightarrow$ tous ses mineurs principaux D_k (et pas seulement diagonaux !) sont alternativement $\leqslant 0$ (k impair) et $\geqslant 0$ (k pair).

1.3 Ensembles convexes

Ensemble convexe : Un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est convexe ssi, $\forall (x, y) \in S^2$:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Intuitivement, un ensemble convexe est tel que tout segment reliant deux points de cet ensemble se trouve à l'intérieur de l'ensemble. La figure 1 donne un exemple d'ensemble convexe et un exemple d'ensemble non convexe.

Ensemble strictement convexe : Un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est strictement convexe ssi, $\forall (x, y) \in S^2$:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{intérieur} S, \forall \lambda \in]0, 1[$$

N.B. : La notion d'« ensemble concave » n'existe pas.

1.4 Fonctions concaves, fonctions convexes

Soit f une fonction de plusieurs variables définie sur un ensemble convexe S.

Fonction concave : f est concave sur S ssi, $\forall(x,y) \in S^2$ et $\forall\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

f est *strictement* concave sur S ssi :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Autrement dit, une fonction f est concave ssi le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par f est situé *au-dessous* de cette surface.

La figure 2 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à une seule variable.

La figure 3 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à 2 variables.

Fonction convexe : f est convexe sur S ssi, $\forall(x,y) \in S^2$ et $\forall\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

f est *strictement* convexe sur S ssi :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Autrement dit, une fonction f est convexe si le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par f est situé *au-dessus* de cette surface.

La figure 4 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à 1 variable.

La figure 5 donne un exemple de fonction strictement strictement convexe dans le cas à 2 variables.

N.B. : Il est important de ne pas confondre la notion d'*ensemble* convexe avec celle de *fonction* convexe.

Propriétés importantes :
- f concave $\Leftrightarrow -f$ convexe
- Si f et g sont des fonctions concaves (resp. convexes), alors $\forall(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $(a.f + b.g)$ est une fonction concave (resp. convexe).
- Si f est une fonction concave et g est une fonction croissante et concave, alors la fonction $g(f(x))$ est concave.
- Si f est une fonction convexe et g est une fonction croissante et convexe, alors la fonction $g(f(x))$ est convexe.
- Une fonction affine est à la fois concave et convexe.

Figure 1: *Exemples d'un ensemble convexe S et d'un ensemble non convexe S'.*

Ensemble convexe S **Ensemble non convexe S'**

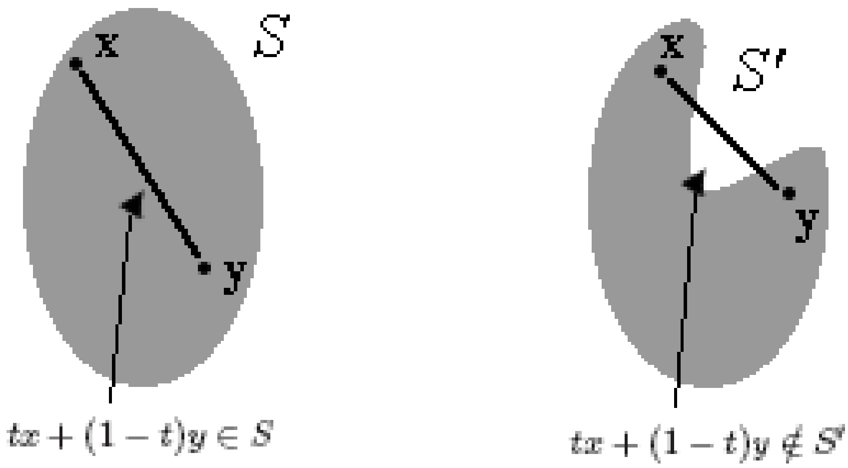


Figure 2: *Fonction (strictement) concave $f(x) = 10 - x^2$.*

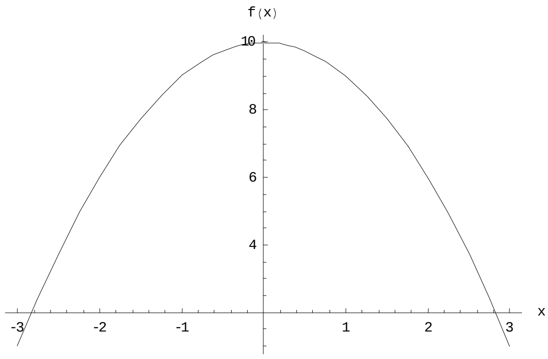


Figure 3: *Fonction (strictement) concave $f(x, y) = 6 - (x-2)^2 - (y-2)^2$. Représentation en 3 dimensions et courbes de niveaux.*

Représentation en 3D **Courbes de niveau**

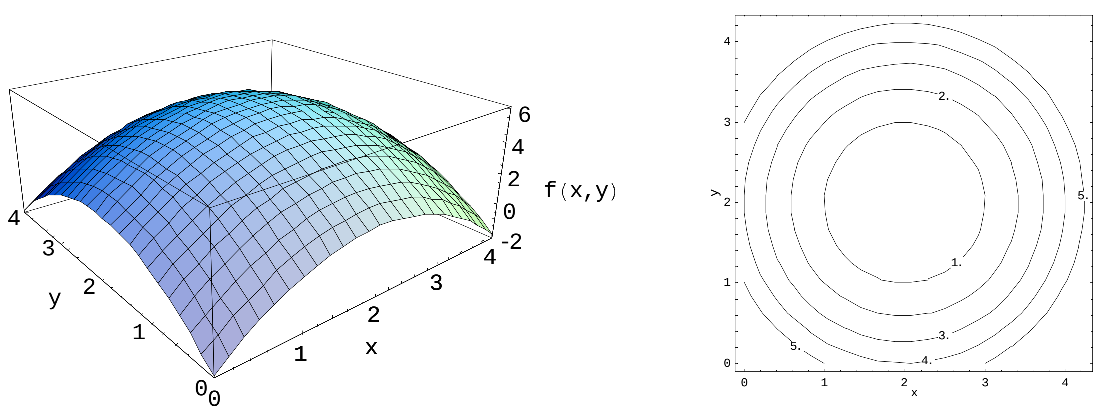


Figure 4: *Fonction (strictement) convexe* $f(x) = x^2$.

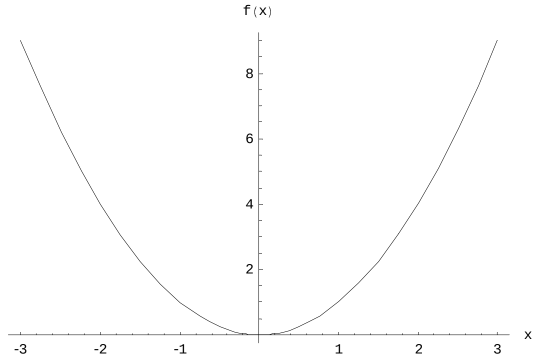
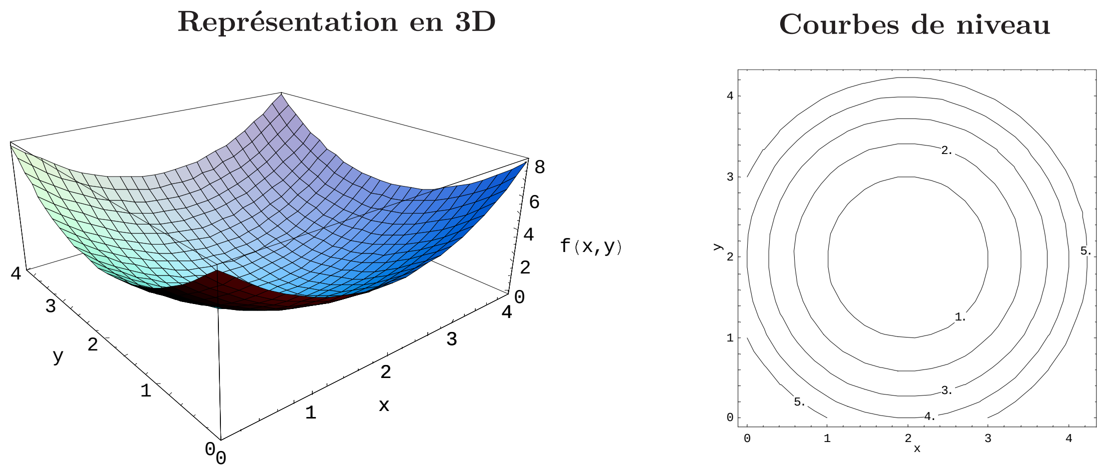


Figure 5: *Fonction (strictement) convexe* $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$. *Représentation en 3 dimensions et courbes de niveaux.*



Caractérisation pour les fonctions à une seule variable :
- f concave $\Leftrightarrow f''(x) \leqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strictement concave (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).
- f convexe $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strictement convexe (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).

Caractérisation pour les fonctions à plusieurs variables :
- f concave $\Leftrightarrow$ la matrice hessienne de f est semi-définie négative $\forall \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$.
- la matrice hessienne de f est définie négative $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ strictement concave (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).
- f concave $\Leftrightarrow$ la matrice hessienne de f est semi-définie positive $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- la matrice hessienne de f est définie négative $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ strictement convexe (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).

Exemple : Montrer que la fonction $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$ est strictement convexe.

Solution : Soit H La matrice hessienne de f. Elle s'écrit :

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Noter qu'ici, la matrice hessienne est indépendante de ses arguments x, y et z (ce n'est pas toujours le cas). Les mineurs principaux diagonaux de H sont $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 4 > 0$ et $D_3 = 8 > 0$, donc H est définie positive, donc f est strictement convexe.

1.5 Fonctions quasi-concaves, fonctions quasi-convexes

Fonctions quasi-concaves : Une fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite quasi-concave ssi ses contours supérieurs forment des ensembles convexes, *c.-à-d.* ssi l'ensemble $P = \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n : f(\widetilde{x}) \geqslant c\}$ est convexe pour toutes les valeurs de c.

Une telle définition ne donne pas une représentation très intuitive de la notion de quasi-concavité d'une fonction. Pour se faire une idée de ce que recouvre ce concept, il est important d'avoir en tête un ou deux exemples de fonctions quasi-concaves.

Dans le cas à une variable, on pensera à la fonction f représentée à la figure 6. Elle n'est clairement pas convexe, puisqu'on peut trouver deux points de cette fonction unis par un segment passant *au-dessus* de la courbe. En revanche, c'est une fonction quasi-concave, car l'ensemble des valeurs x telles que $f(x) \geqslant c$ est un ensemble convexe. Cet ensemble correspond en effet au segment en gras sur le graphique. Quelle que soit la valeur de c, ce segment est est constitué d'un seul tenant.

A l'inverse, la fonction f à une variable représentée à la figure 7 n'est pas quasi-concave car ses contours supérieurs ne sont pas convexes.

Figure 6: *Fonction (strictement) quasi-concave* $f(x,y) = \exp(-x^2)$. *La fonction est quasi concave car l'ensemble des valeurs* x *telles que* $f(x) \geqslant c$ *est un ensemble (ici un segment) (strictement) convexe.*

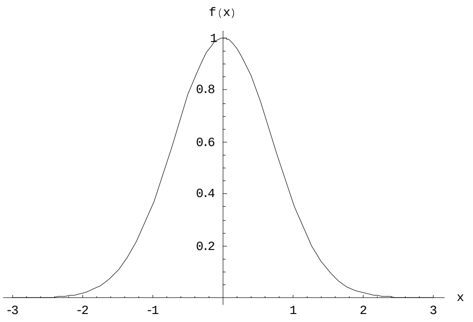
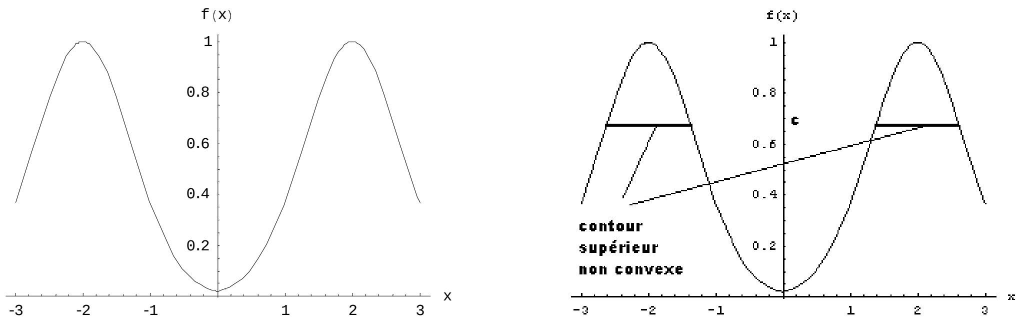


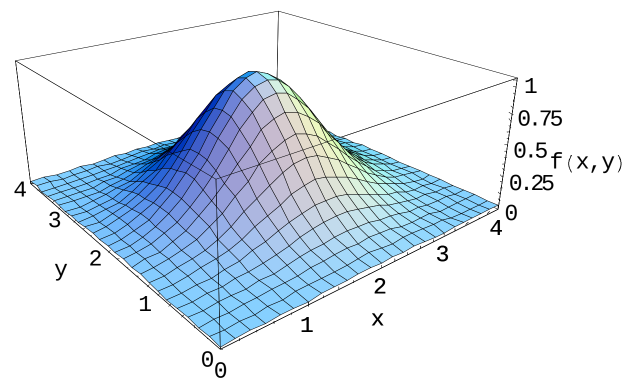
Figure 7: *Fonction qui n'est pas quasi-concave car l'ensemble des valeurs* x *telles que* $f(x) \geqslant c$ *est un ensemble (constitué ici de la réunion de deux segments) non convexe.*



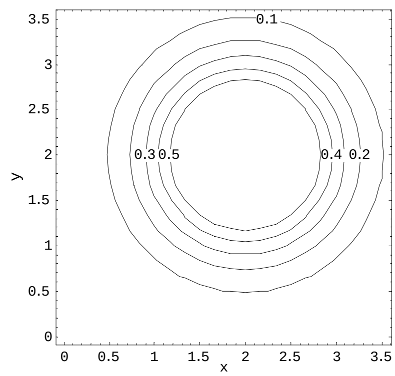
Dans le cas à 2 variables, on pensera à la fonction représentée à la figure 8. La surface dessinée par cette fonction est « en cloche », c'est-à-dire que ses bords sont convexes. Bien que cette fonction ne soit pas convexe, l'ensemble de ses contours supérieurs forment des ensembles convexes, comme on peut le voir sur le graphique de ses courbes de niveaux (qui délimitent ses contours supérieurs).

Figure 8: *Fonction (strictement) quasi-concave* $f(x,y) = \exp\left[-(x-2)^2 - (y-2)^2\right]$. *Représentation en 3 dimensions et courbes de niveau.*

Représentation de la fonction en 3D



Courbes de niveau



Fonctions strictement quasi-concaves : Une fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite strictement quasi-concave si ses contours supérieurs forment des ensembles *strictement* convexes, i.e. si l'ensemble $P = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant c\}$ est strictement convexe pour toutes les valeurs de c.

Dans le cas à une seule variable, une fonction ne sera strictement quasi-concave que si sa courbe ne comporte aucune section horizontale.

Dans le cas à deux variables, une fonction quasi-concave ne sera strictement quasi-concave que si ses contours supérieurs ne présentent pas de sections horizontales et si la fonction ne comporte pas de « replats »(qui se traduisent par des courbes d'indifférences « épaisses ») (cf. figure 9).

Fonctions quasi-convexes : Une fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite quasi-convexe si ses contours inférieurs forment des ensembles convexes, *c.-à-d.* si l'ensemble $P = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant c\}$ est convexe pour toutes les valeurs de c.

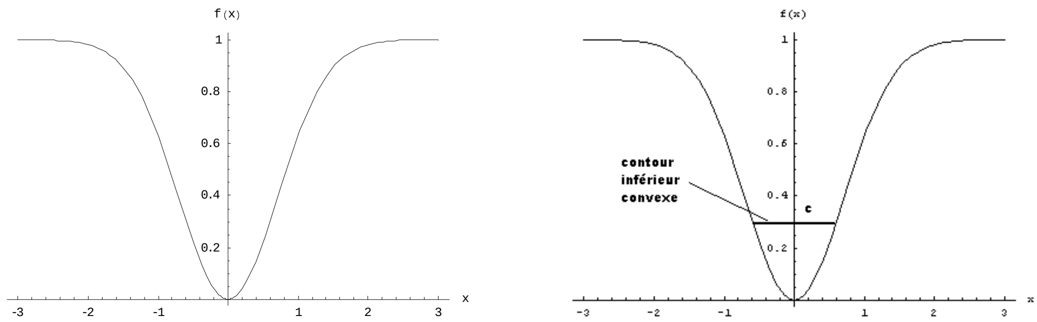
Fonctions strictement quasi-convexes : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite strictement quasi-convexe si ses contours inférieurs forment des ensembles strictement convexes, i.e. si l'ensemble $P = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant c\}$ est strictement convexe pour toutes les valeurs de c.

Figure 9: *Courbes d'indifférence de fonctions quasi-concaves, mais pas strictement quasi-concaves*

Contre-exemple 1 **Contre-exemple 2**

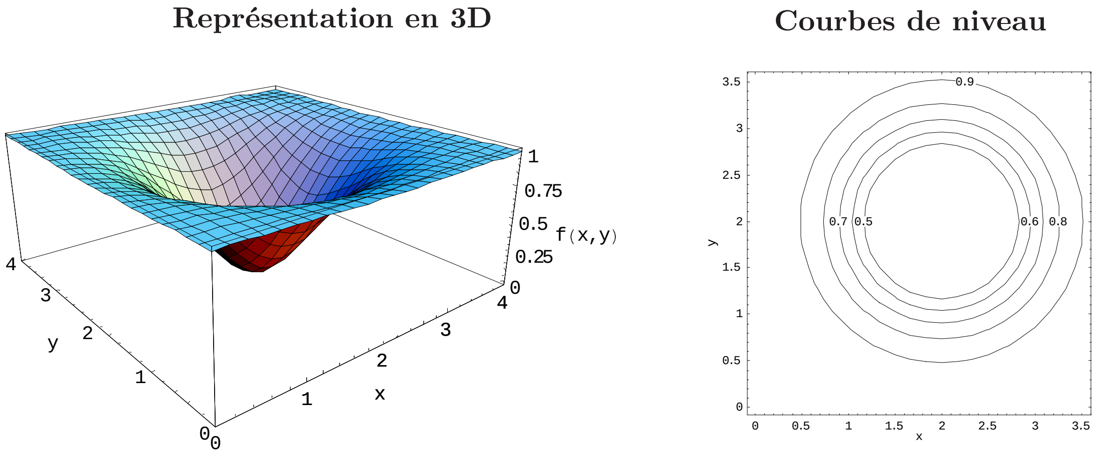
La figure 10 montre le graphique d'une fonction quasi-convexe dans le cas à une seule variable. Bien que cette fonction ne soit pas convexe, ses contours inférieurs sont convexes. Elle est donc bien quasi-convexe.

Figure 10: *Fonction (strictement) quasi-convexe* $f(x,y) = 1 - \exp(-x^2)$*. La fonction est quasi-concave car l'ensemble des valeurs* x *telles que* $f(x) \leqslant c$ *est un ensemble (ici un segment) convexe.*



La figure 11 montre la représentation en 3 dimensions et les courbes de niveaux d'une fonction à deux variables strictement quasi-convexe : bien que les bords de la fonction soient concaves, ses contours inférieurs sont strictement convexes.

Figure 11: *Fonction (strictement) quasi-convexe* $f(x,y) = 1 - \exp\left[-(x-2)^2 - (y-2)^2\right]$. *Représentation en 3 dimensions et courbes de niveau.*



Propriétés importantes :

- f concave (resp. convexe) $\Rightarrow$ f quasi-concave (resp. quasi-convexe) (attention : la réciproque n'est pas vraie).
- f quasi-concave $\Leftrightarrow$ $(-f)$ quasi-convexe.
- La somme de deux fonctions quasi-concaves (resp. quasi-convexes) n'est pas nécessairement une fonction quasi-concave (resp. quasi-convexe).
- Toute transformation monotone d'une fonction concave (resp. convexe) est une fonction quasi-concave (resp. quasi-convexe) : si f est une fonction concave (resp. convexe) et g est une fonction monotone, alors la fonction $g(f(x))$ est quasi concave (resp. quasi-convexe).

Caractérisation :

- f quasi-concave $\Rightarrow$ les mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordée de f alternent en signe à partir de $k = 3$, avec $D_k \geqslant 0$ pour k impair et $D_k \leqslant 0$ (k pair) $\forall \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).
- Les mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordée de f alternent en signe à partir de $k = 2$, avec $D_k > 0$ pour k impair et $D_k < 0$ (k pair) $\forall \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ quasi-concave.
- f quasi-convexe $\Rightarrow$ les mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordée de f sont tous $\leqslant 0$ à partir de $k = 3$ $\forall \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).
- Les mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordée de f sont tous < 0 à partir de $k = 2$ $\forall \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ quasi-convexe.

Exemple : Trouver une condition suffisante sur x et y permettant d'affirmer que la fonction $f(xy) = xy$ est quasi-concave.

Solution : Soit $\overline{H}$ La matrice hessienne bordée de f. Elle s'écrit :

$$\overline{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & f'_x & f'_y \\ f'_x & f''_{xx} & f''_{xy} \\ f'_y & f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le mineur diagonal principal d'ordre 3 de $\overline{H}$ est $D_3 = 2xy$. Une condition suffisante pour que f soit quasi-concave est que $D_3 > 0$. Ce sera le cas en particulier si $x > 0$ et $y > 0$.

2 Généralités sur l'optimisation

2.1 Notations

Un programme d'optimisation s'écrit typiquement sous la forme (avec s.c. pour « sous contraintes ») :

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{s.c.} & \textit{contrainte}(j) \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

s'il s'agit d'un programme de *maximisation* sous contraintes et sous la forme :

$$\mathscr{P}' \left| \begin{array}{ll} \min\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{s.c.} & \textit{contrainte}(j) \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

s'il s'agit d'un programme de *minimisation* sous contraintes.

La fonction f est appelée *fonction objectif*. Le programme consiste à chercher les valeurs $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ pour laquelle la valeur de cette fonction est maximale (ou minimale) sous les contraintes. On appelle *Optimum* la solution d'un programme d'optimisation : il s'agit soit d'un *maximum*, soit d'un *minimum*.

Les contraintes peuvent prendre plusieurs formes distinctes :
- *contraintes en équations* : $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = c_j \; \forall j = 1, ..., m$
- *contraintes en inéquations* : $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant c_j \; \forall j = 1, ..., m$
- *contraintes de non-négativité* : $x_i \geqslant 0 \; \forall i = 1, ..., n$

2.2 Définitions

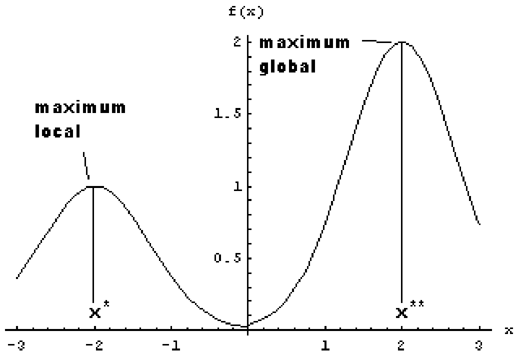
Maximum, minimum :
- La valeur $\widetilde{x}^*$ qui résout le programme $\mathscr{P}$ est un *maximum* de la fonction f sous les contraintes du programme.
- La valeur $\widetilde{x}^*$ qui résout le programme $\mathscr{P}'$ est un *minimum* de la fonction f sous les contraintes du programme.

Optimum local :
- La variable x^* est un maximum local d'une fonction f définie sur l'ensemble convexe S $\Leftrightarrow \exists \; \epsilon > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x^*) \; \forall x \in S$ et $|x - x^*| \leqslant \epsilon$
- La variable x^* est un minimum local d'une fonction f définie sur l'ensemble convexe S $\Leftrightarrow \exists \; \epsilon > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(x^*) \; \forall x \in S$ et $|x - x^*| \leqslant \epsilon$

Optimum global :
- La variable x^* est un maximum global d'une fonction f définie sur l'ensemble convexe $S \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(x^*) \; \forall x \in S$
- La variable x^* est un minimum global d'une fonction f définie sur l'ensemble convexe $S \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(x^*) \; \forall x \in S$

La figure 12 montre le graphique d'une fonction f comportant un maximum local et un maximum global.

Figure 12: *Fonction f admettant un maximum local en x^* et un maximum global en x^{**} sur l'ensemble de son domaine de définition.*



2.3 Remarques

Transformation de la fonction objectif : Soit g une fonction à une seule variable strictement croissante. Alors l'ensemble des solutions du programme $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P}\left|\begin{array}{ll}\max\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) \\ \text{s.c.} & \textit{contraintes}\end{array}\right.$$

est identique à l'ensemble des solutions du programme $\mathscr{P}^*$:

$$\mathscr{P}^*\left|\begin{array}{ll}\max\limits_{\widetilde{x}} & g\left(f(\widetilde{x})\right) \\ \text{s.c.} & \textit{contraintes}\end{array}\right.$$

Transformation des programmes de minimisation : tout programme de minimisation peut aisément être transformé en programme de maximisation en remplaçant la fonction objectif f par son opposée $-f$:

$$\left|\begin{array}{ll}\min\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) \\ \text{s.c.} & \textit{contraintes}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll}\max\limits_{\widetilde{x}} & -f(\widetilde{x}) \\ \text{s.c.} & \textit{contraintes}\end{array}\right.$$

N.B. : Dans les sections qui suivent, on écrira tous les programmes d'optimisation comme des programmes de *maximisation* sous contraintes. On précisera, en cas de besoin, comment adapter la méthode de résolution au cas des programmes de *minimisation* sous contraintes.

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un optimum :
Pour trouver la solution $\widetilde{x}^*$ d'un programme d'optimisation quelconque, on distingue traditionnellement deux types de conditions :

- **Les conditions du premier ordre** (CPO) sont les conditions *nécessaires* que doit vérifier un optimum, s'il existe. Ces conditions s'écrivent comme un système d'équations ou d'inéquations dont la résolution permet de trouver $\widetilde{x}^*$.
- **Les conditions du second ordre** (CSO) garantissent que les conditions du premier ordre sont *suffisantes* pour que $\widetilde{x}^*$ soit bien la solution du programme d'optimisation.

3 Optimisation sans contraintes

3.1 Cas d'une fonction à une seule variable

On commence par envisager le cas d'une fonction f à une seule variable que l'on maximise sans contrainte.

On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} : \max_x f(x)$$

Condition du premier ordre : si x^* est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors x^* vérifie :

$$f'(x^*) = 0$$

Conditions du second ordre pour un optimum local : Supposons qu'il existe un x^* qui vérifie la CPO. Alors :

- x^* est un maximum local $\Rightarrow f''(x^*) \leqslant 0$
- $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ est un maximum local
- x^* est un minimum local $\Rightarrow f''(x^*) \geqslant 0$
- $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ est un minimum local

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : Supposons qu'il existe un x^* qui vérifie la CPO. Alors :

- $f''(x) \leqslant 0 \quad \forall x$ (f est concave) $\Rightarrow x^*$ est un maximum global
- $f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x$ (f est convexe) $\Rightarrow x^*$ est un minimum global

Exemple : Trouver le maximum global du programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} : \max_x f(x) = -(x-2)^2$$

Solution :

CPO : x^* est une solution du programme $\mathscr{P} \Rightarrow f'(x^*) = 0$, soit $-2(x^*-2) = 0 \Rightarrow x^* = 2$

CSO : $f''(x) = -2 < 0\ \forall x$, donc x^* est un maximum global

Ccl : $x^* = 2$ est le maximum global de f.

3.2 Cas d'une fonction à plusieurs variables

Soit une fonction f à n variables.

On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} : \max_{x_1, x_2, ..., x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Conditions du premier ordre : Si $\widetilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors $\widetilde{x}^*$ vérifie :

$$\frac{\partial f(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

Conditions du second ordre pour un optimum local : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO. Alors :
- $H(\widetilde{x}^*)$ est définie négative $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum local
- $\widetilde{x}^*$ est un maximum local $\Rightarrow H(\widetilde{x}^*)$ est semi-définie négative
- $H(\widetilde{x}^*)$ est définie positive $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum local
- $\widetilde{x}^*$ est un minimum local $\Rightarrow H(\widetilde{x}^*)$ est semi-définie positive

où $H(\widetilde{x}^*)$ désigne la matrice hessienne de f évaluée au point $\widetilde{x}^*$.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO. Alors :
- $H(\widetilde{z})$ est semi-définie négative $\forall\ \widetilde{z}$ (f est concave) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum global
- $H(\widetilde{z})$ est semi-définie positive $\forall\ \widetilde{z}$ (f est convexe) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum global

où $H(\widetilde{z})$ désigne la matrice hessienne de f évaluée au point $\widetilde{z}$.

Exemple : Résoudre le programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} : \max_{x,y} f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Solution :

CPO : Si (x^*, y^*) est une solution du programme $\mathscr{P}$ alors :

$$\begin{aligned} f'_x(x^*, y^*) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3(y^*) - 3(x^*)^2 = 0 \\ f'_y(x^*, y^*) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3(x^*) - 3(y^*)^2 = 0 \end{aligned}$$

(x^*, y^*) est donc tel que $x^* = (y^*)^2 = (x^*)^4$. Il y a deux solutions possibles : $(0,0)$ et $(1,1)$.

CSO : la matrice hessienne de f évaluée en tout point (x,y) s'écrit :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

on a donc :

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux de $H(0,0)$ sont $D_1 = 0$ et $D_2 = -9$, donc $H(0,0)$ n'est pas semi-définie négative, donc $(0,0)$ n'est pas un maximum local de f.

Les mineurs principaux diagonaux de $H(1,1)$ sont $D_1 = -1$ et $D_2 = 27$, donc $H(1,1)$ est définie négative, donc (1,1) est un maximum local de f.

Par ailleurs, comme $H(0,0)$ n'est pas semi-définie négative, $H(x,y)$ n'est pas semi-définie négative pour tout (x,y). Les conditions du second ordre ne permettent donc pas de conclure que $(1,1)$ est un maximum global. En fait, on peut montrer que ce n'est pas le cas : $f(1,1) = 1$, mais $f(-1,-1) = 5$ (par exemple).

Ccl : $(x^*, y^*) = (1,1)$ est un maximum local, mais pas un maximum global de f.

4 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'équations : le Lagrangien

On envisage maintenant l'optimisation d'une fonction f à n variables sous m contraintes de la forme : $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = c_j, \quad j = 1, ..., m$

4.1 Cas à une seule contrainte

On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) \\ \text{s.c.} & g(\widetilde{x}) = c \end{array} \right.$$

Lagrangien : On appelle *Lagrangien*, noté $\mathcal{L}$, la fonction suivante :

$$\mathcal{L}(\widetilde{x}, \lambda) = f(\widetilde{x}) - \lambda(g(\widetilde{x}) - c)$$

où la variable λ est appelée *multiplicateur de Lagrange* associé à la contrainte.

Conditions de qualification de la contrainte : Pour pouvoir utiliser le Lagrangien dans la résolution d'un programme d'optimisation sous une contrainte en équation, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(a) Les dérivées partielles de la fonction contrainte g évaluées à l'optimum $\widetilde{x}^*$ ne sont pas simultanément nulles, *c.-à-d.* $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\widetilde{x}^*) \neq 0$ pour au moins un x_i, $i = 1, ..., n$.

(b) La fonction contrainte g est linéaire.

N.B. : Les conditions de qualification des contraintes garantissennt simplement qu'il n'y a pas de contraintes potentiellement contradictoires.

Conditions du premier ordre : On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\widetilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors il existe un unique λ^* tel que $\widetilde{x}^*$ vérifie les $n+1$ conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial f(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* . \dfrac{\partial g(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\widetilde{x}^*) = c \end{array} \right.$$

Matrice hessienne bordée du Lagrangien dans le cas à une seule contrainte : On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien $\overline{H}_{\mathcal{L}}$ évaluée au point $\widetilde{x}$ la matrice des dérivées partielles secondes de $\mathcal{L}$ par rapport à x_i bordée par les dérivées partielles premières de la fonction contrainte g :

$$\overline{H}_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{array}\right)$$

$\overline{H}_{\mathcal{L}}$ est une matrice symétrique d'ordre $n+1$.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO.

- Les $n-1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $H_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \lambda^*)$ évaluée à l'optimum sont alternativement > 0 et < 0, le dernier d'entre eux (D_{n+1}) étant de même signe que $(-1)^n \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum local.
- Les $n-1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $H_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \lambda^*)$ évaluée à l'optimum sont tous tous $< 0 \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum local.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO. Alors :

- Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction concave (ce qui est est le cas en particulier si f est concave et si $\lambda^* g$ est convexe) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum global.
- Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction convexe (ce qui est est le cas en particulier si f est convexe et $\lambda^* g$ est concave) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum global.

Exemple : Résoudre le programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{lrl} \max\limits_{x,y} & f(x,y) & = xy \\ \text{s.c.} & x+y & = 6 \end{array} \right.$$

Solution :

Le Lagrangien associé à ce programme s'écrit :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y-6)$$

Condition de qualification de la contrainte : Soit $g(x,y) = x+y-6$ et soit (x^*, y^*) une solution du programme. La condition de qualification de la contrainte sera vérifiée si $g'_x(x^*, y^*) \neq 0$ et $g'_y(x^*, y^*) \neq 0$. Il faudra le vérifier quand on connaîtra (x^*, y^*).

CPO : Si (x^*, y^*) est une solution du programme $\mathscr{P}$, alors :

$$\begin{array}{rcrl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow & y^* - \lambda^* & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow & x^* - \lambda^* & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 & \Leftrightarrow & x^* + y^* - 6 & = 0 \end{array}$$

L'unique solution de ce système de 3 équations à 3 inconnues est $(x^*, y^*, \lambda^*) = (3, 3, 3)$. Cette solution vérifie la condition de qualification de la contrainte puisque $g'_x(3, 3) = 1 \neq 0$ et $g'_y(3, 3) = 1 \neq 0$.

CSO : La matrice hessienne bordée du Lagrangien s'écrit, pour tout (x, y) :

$$\overline{H}_{\mathcal{L}}(x, y) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & g'_x & g'_y \\ \hline g'_x & f''_{xx} & f''_{xy} \\ g'_y & f''_{xy} & f''_{yy} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le mineur principal d'ordre 3 de cette matrice évaluée en $(3, 3)$ est égal à $2 > 0$. Il est donc du même signe que $(-1)^n$, puisque $n = 2$. Par conséquent, le point $(3, 3)$ est un maximum local. En revanche, la fonction f n'étant pas concave (elle est seulement quasi-concave), la condition suffisante pour que (x^*, y^*) soit un maximum global n'est pas vérifiée.

Cc : Le programme $\mathscr{P}$ admet un maximum local en $(3, 3)$.

4.2 Cas à m contraintes

Le programme précédent se généralise aisément au cas à m contraintes.
On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant (où $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$) :

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{lll} \max\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) & \\ \text{s.c.} & g_j(\widetilde{x}) & = c_j \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

Lagrangien : On appelle *Lagrangien*, noté $\mathcal{L}$, la fonction suivante :

$$\mathcal{L}(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) = f(\widetilde{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\widetilde{x}) - c_j)$$

où les variables λ_j sont appelées *multiplicateurs de Lagrange* associés aux j contraintes et $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Conditions de qualification des contraintes : Pour pouvoir utiliser le Lagrangien dans la résolution d'un programme d'optimisation sous plusieurs contraintes en équations, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(a) La matrice jacobienne des fonctions contraintes g_j, $j = 1, ..., m$, notée J_G et de taille (m, n) est de rang m lorsqu'elle est évaluée à l'optimum $\widetilde{x^*}$.

(b) Les fonctions contraintes g_j sont toutes linéaires.

N.B. : il existe d'autres propriétés (non indiquées ici) portant sur les fonctions contraintes qui permettent de garantir que la condition de qualification de la contrainte est vérifiée.

Conditions du premier ordre : On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\widetilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors il existe un unique vecteur $\widetilde{\lambda}^*$ tel que $\widetilde{x}^*$ vérifie les $n+m$ conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)}{\partial x_i} = 0 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial f(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* . \dfrac{\partial g_j(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j^*} = 0 & \Leftrightarrow \quad g_j(\widetilde{x}^*) = c_j \qquad \forall j = 1, ..., m \end{cases}$$

Matrice hessienne bordée du Lagrangien dans le cas à m contraintes : On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien $\overline{H}_{\mathcal{L}}$ dans le cas à m contraintes la matrice hessienne du Lagrangien (dérivées partielles secondes de $\mathcal{L}$ par rapport à x_i bordée par les dérivées partielles premières des m fonctions contraintes g_j, évaluée au point $\widetilde{x}$:

$$\overline{H}_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{array} \right)$$

$\overline{H}_{\mathcal{L}}$ est une matrice symétrique d'ordre $m+n$.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO.

- Les $n-m$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $H_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)$ évaluée à l'optimum sont alternativement > 0 et < 0, le dernier d'entre eux (D_{m+n}) étant de même signe que $(-1)^n \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum local.
- Les $n-m$ mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $H_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)$ évaluée à l'optimum sont tous strictement du même signe que $(-1)^m \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum local.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO.

- Si le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction concave (ce qui est est le cas en particulier si f est concave et les $\lambda_j^* g_j$ sont convexes $\forall j = 1, ..., m$) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum global.
- Si le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction convexe (ce qui est est le cas en particulier si f est convexe et les $\lambda_j^* g_j$ sont concaves $\forall j = 1, ..., m$) $\Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum global.

Exemple : Résoudre le programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{lrl} \max\limits_{x,y} & x^2 + y^2 + z^2 & \\ \text{s.c.} & x + 2y + z & = 1 \\ & 2x - y - 3z & = 4 \end{array} \right.$$

Solution :

Le Lagrangien associé à ce programme s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) - \lambda_2(2x - y - 3z - 4)$$

Condition de qualification des contraintes : Soient $g_1(x, y, z) = x + 2y + z - 1$ et $g_2(x, y, z) = 2x - y - 3z - 4$. La matrice jacobienne J_G des fonctions contraintes évaluée au point (x, y, z) s'écrit :

$$J_G(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs-lignes de cette matrice étant linéairement indépendants, J_G est de rang 2 pour tout (x, y, z) (donc en particulier pour (x^*, y^*, z^*)). La contrainte de qualification est donc vérifiée. Le fait que les deux contraintes soient linéaires permet aussi de l'affirmer.

CPO : Si $(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ est une solution du programme $\mathscr{P}$, alors :

$$\begin{array}{rcrl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow & 2x^* - \lambda_1^* - 2\lambda_2^* & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow & 2y^* - 2\lambda_1^* + \lambda_2^* & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 & \Leftrightarrow & 2z^* - 2\lambda_1^* + 3\lambda_2^* & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 & \Leftrightarrow & x^* + 2y^* + z^* & = 1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 & \Leftrightarrow & 2x^* - y^* - 3z^* & = 4 \end{array}$$

L'unique solution de ce système de 5 équations à 5 inconnues est :

$$(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, \frac{-11}{15}, \frac{52}{75}, \frac{54}{75})$$

CSO : La fonction f étant une somme de fonctions convexes, elle est convexe quelles que soient les valeurs de λ_1 et λ_2. Par conséquent, $(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ est un maximum global.

Ccl : Le programme $\mathscr{P}$ admet un maximum global en $(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, \frac{-11}{15}, \frac{52}{75}, \frac{54}{75})$.

5 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations : les conditions de Kuhn et Tucker

On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{lll} \max\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) & \\ \text{s.c.} & g_j(\widetilde{x}) & \leqslant c_j \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

Soit $\widetilde{x}^*$ la solution de ce programme. Deux situations sont envisageables pour chaque contrainte j

- soit $g_j(\widetilde{x}^*) = c_j$: dans ce cas, on dit que la contrainte j est *saturée* à l'optimum ;
- soit $g_j(\widetilde{x}^*) < c_j$: dans ce cas, on dit que la contrainte j est *non saturée* à l'optimum.

Comme précédemment, on définit le Lagrangien comme la fonction $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) = f(\widetilde{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\widetilde{x}) - c_j)$$

où les variables λ_j sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte j et $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$.

Conditions de qualification des contraintes : Pour pouvoir utiliser le Lagrangien dans la résolution d'un programme d'optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(a) Soit $s \leqslant m$ le nombre de contraintes saturées à l'optimum $\widetilde{x^*}$. On suppose sans perte de généralité qu'il s'agit des s premières contraintes $g_j,\ j = 1, ..., s$. Si la matrice jacobienne de ces s fonctions contraintes, notée J_G et de taille (s, n), est de rang s lorsqu'elle est évaluée à l'optimum $\widetilde{x}^*$, alors la condition de qualification des contraintes est vérifiée.

(b) Les fonctions contraintes $g_j,\ j = 1, ..., s$ sont toutes linéaires.

Les conditions du premier ordre que doit vérifier toute solution $\widetilde{x}^*$ du programme $\mathscr{P}$ sont légèrement modifiées par rapport au cas précédent (contraintes prenant la forme d'équations) et portent le nom de « conditions de Kuhn et Tucker ». Elles ont notamment pour propriété que le multiplicateur de Lagrange λ_j associé à la contrainte j est nul lorsque cette contrainte n'est pas saturée à l'équilibre.

Conditions du premier ordre (Kuhn et Tucker) : On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\widetilde{x}^* = \widetilde{(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}$ est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors il existe un unique vecteur $\widetilde{\lambda}^*$ tel que $\widetilde{x}^*$ vérifie les $n + 3m$ conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)}{\partial x_i} = 0 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial f(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* . \dfrac{\partial g_j(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda^*})}{\partial \lambda_j^*} \geqslant 0 & \Leftrightarrow \quad g_j(\widetilde{x}^*) \leqslant c_j \qquad \forall j = 1, ..., m \\ \lambda_j^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow \quad \lambda_j^* \geqslant 0 \qquad \forall j = 1, ..., m \\ \lambda_j^* \left(g_j(\widetilde{x}^*) - c_j\right) = 0 & \Leftrightarrow \quad \lambda_j^* = 0 \text{ ou } g_j(\widetilde{x}^*) = c_j \qquad \forall j = 1, ..., m \end{cases}$$

N.B. : ces conditions n'excluent pas la possibilité que $\lambda_j^* = 0$ *et* $g_j(\widetilde{x}^*) = c_j$ simultanément.

En pratique, la résolution des conditions de Kuhn et Tucker est compliquée par le fait qu'il faut envisager successivement toutes les configurations possibles : toutes les contraintes sont saturées à l'équilibre, toutes sauf une, deux,..., aucune (tous les λ_j sont nuls à l'équilibre). Pour trouver la bonne solution, il faut procéder par élimination, en montrant que parmi l'ensemble de ces possibilités, certaines aboutissent à des contradictions.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO. Soit s le nombre de contraintes saturées à l'optimum. Sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit des s premières. On désigne par $\overline{H}_{\mathcal{L}}$ la matrice hessienne du Lagrangien bordée par les dérivées premières des seules contraintes saturées. Cette matrice est symétrique d'ordre $s+n$.

- Les $n-s$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice $\overline{H}_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)$ évaluée à l'optimum sont alternativement >0 et <0, le dernier d'entre eux (D_{n+s}) étant du même signe que $(-1)^n \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum local.
- Les $n-s$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice $\overline{H}_{\mathcal{L}}(\widetilde{x}^*, \widetilde{\lambda}^*)$ évaluée à l'optimum sont tous du même signe (strictement) que $(-1)^m \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum local.

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : Supposons qu'il existe un $\widetilde{x}^*$ qui vérifie les CPO.

- Si f est concave et les g_j sont convexes $\forall j = 1, ..., m \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum global
- Si f est quasi-concave et les g_i sont quasi-convexes $\forall j = 1, ..., m$ et $f_i'(\widetilde{x}^*) \neq 0$ $\forall i = 1, ..., n \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un maximum global
- Si f est convexe et les g_j sont concaves $\forall j = 1, ..., m \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum global
- Si f est quasi-convexe et les g_j sont quasi-concaves $\forall j = 1, ..., m$ et $f_i'(\widetilde{x}^*) \neq 0$ $\forall i = 1, ..., n \Rightarrow \widetilde{x}^*$ est un minimum global

Dans les cas 2 et 3, si l'une des dérivées partielles de f (notées f_i') est nulle au point $\widetilde{x}^*$, alors $\widetilde{x}^*$ peut être ou ne pas être un maximum (ou un minimum) global. Pour le savoir, il peut être utile de calculer la valeur de f en $\widetilde{x}^*$ et de la comparer à la valeur prise par f pour d'autres points vérifiant les conditions du premier ordre.

Note sur les programmes de minimisation sous contraintes d'inéquations : Il est très facile de passer d'un programme de minimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations à un programme de maximisation.

Soit $\mathscr{P}'$ le programme de minimisation suivant :

$$\mathscr{P}' \left| \begin{array}{lll} \min\limits_{\widetilde{x}} & f(\widetilde{x}) & \\ \text{s.c.} & g_j(\widetilde{x}) & \geqslant c_j \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

Pour pouvoir appliquer les conditions de Kuhn et Tucker évoquées ci-dessus, il suffit de transformer le programme $\mathscr{P}'$ en un programme de maximisation $\mathscr{P}^*$:

$$\mathscr{P}^* \left| \begin{array}{lll} \max\limits_{\widetilde{x}} & -f(\widetilde{x}) & \\ \text{s.c.} & -g_j(\widetilde{x}) & \leqslant -c_j \quad \forall j = 1, ..., m \end{array} \right.$$

Le Lagrangien s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) &= -f(\widetilde{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(-g_j(\widetilde{x}) + c_j) \\ &= -f(\widetilde{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(g_j(\widetilde{x}) - c_j) \end{aligned}$$

Pour trouver la solution du programme, on cherche les conditions du premier ordre associées à ce Lagrangien.

Exemple : Résoudre le programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P}\left|\begin{array}{lrl} \max\limits_{x,y} & \multicolumn{2}{l}{\left[-(x-4)^2-(y-4)^2\right]} \\ \text{s.c.} & x+y & \leqslant 4 \\ & x+3y & \leqslant 9 \end{array}\right.$$

Solution :

Le Lagrangien associé à ce programme s'écrit :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = -(x-4)^2-(y-4)^2-\lambda_1(x+y-4)-\lambda_2(x+3y-9)$$

Condition de qualification des contraintes : Toutes les contraintes étant linéaires, la contrainte de qualification est automatiquement vérifiée.

CPO : Si $(x^*,y^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)$ est une solution du programme $\mathscr{P}$, alors :

$$\begin{array}{rcrl} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0 & \Leftrightarrow & -2(x^*-4)-\lambda_1^*-\lambda_2^* & =0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0 & \Leftrightarrow & -2(y^*-4)-\lambda_1^*-3\lambda_2^* & =0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_1}\geqslant 0 & \Leftrightarrow & x^*+y^* & \leqslant 4 \\ \lambda_1^*\geqslant 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1^* & \geqslant 0 \\ \lambda_1^*.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_1}=0 & \Leftrightarrow & \lambda_1^*(x^*+y^*-4) & =0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_2}\geqslant 0 & \Leftrightarrow & x^*+3y^* & \leqslant 9 \\ \lambda_2^*\geqslant 0 & \Leftrightarrow & \lambda_2^* & \geqslant 0 \\ \lambda_2^*.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_2}=0 & \Leftrightarrow & \lambda_2^*(x^*+3y^*-9) & =0 \end{array}$$

Pour déterminer les solutions de ce système, il faut envisager successivement tous les cas de figure possibles portant sur la saturation des contraintes et procéder par élimination :

- Cas 1 : $(x^*+y^*=4)$ et $(x^*+3y^*=9)$ (les deux contraintes sont saturées à l'optimum). Dans ce cas, on a $x=\frac{3}{2}$ et $y=\frac{5}{2}$. Alors, les deux premières équations se réécrivent :

$$\begin{array}{rcl} 5-\lambda_1^*-\lambda_2^* & = & 0 \\ 3-\lambda_1^*-3\lambda_2^* & = & 0 \end{array}$$

  qui implique que $\lambda_1^*=6$ et $\lambda_2^*=-1$, ce qui viole la condition $\lambda_2^*\geqslant 0$.
- Cas 2 : $(x^*+y^*=4)$ et $(x^*+3y^*<9)$, donc $\lambda_2^*=0$ (seule la première contrainte est saturée à l'optimum). Alors, les deux premières équations impliquent que $x^*=y^*=2$ et $\lambda_1^*=4$. Toutes les conditions sont satisfaites, donc $(x^*,y^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)=(2,2,4,0)$ est une solution possible.
- Cas 3 : $(x^*+y^*<4)$ et $(x^*+3y^*=9)$, donc $\lambda_1^*=0$ (seule la seconde contrainte est saturée à l'optimum). Alors, les deux premières équations impliquent que $x^*=\frac{12}{5}$ et $y^*=\frac{11}{5}$, ce qui viole la condition $x^*+y^*<4$.
- Cas 4 : $(x^*+y^*<4)$ et $(x^*+3y^*<9)$, donc $\lambda_1^*=\lambda_2^*=0$ (aucune des deux contraintes n'est saturée à l'optimum). Alors, les deux premières équations impliquent que $x^*=y^*=4$, ce qui viole la condition $x^*+y^*<4$.

CSO : la fonction f est concave et les deux contraintes sont linéaires. Par conséquent, $(x^*,y^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)$ est un maximum global.

CCl : Le programme $\mathscr{P}$ admet un maximum global en $(2,2,4,0)$.

6 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations incluant des contraintes de non-négativité

Dans de nombreuses application économiques, les programmes d'optimisation considérés imposent que les variables considérées ne puissent pas être négatives (le travail ou le capital dans la fonction de production, par exemple).

On considère le programme de maximisation $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} \left| \begin{array}{lrll} \max\limits_{x_1,x_2,...,x_n} & f(\widetilde{x}) & & \\ \text{s.c.} & g_j(\widetilde{x}) & \leqslant c_j & \forall j = 1,...,m \\ & x_i & \geqslant 0 & \forall i = 1,...,n \end{array} \right.$$

En réalité, le programme $\mathscr{P}$ n'est qu'un cas particulier du programmes d'optimisation étudié dans la section précédente (il suffit de réécrire les contraintes $x_i \geqslant 0$ sous la forme $-x_i \leqslant 0$ pour s'en apercevoir). Toutefois, la résolution de ce programme selon la méthode exposée précédemment exigerait de travailler avec $n+m$ multiplicateurs de Lagrange, ce qui est peu commode lorsque n est grand. C'est la raison pour laquelle on préférera, pour ce type de programmes, travailler à partir d'un Lagrangien dit « modifié », à partir duquel on peut dériver des conditions de Kuhn et Tucker plus simples à manipuler.

Lagrangien modifié : Le Lagrangien modifié, noté $\mathcal{M}(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})$, s'écrit :

$$\mathcal{M}(\widetilde{x},\widetilde{\lambda}) = f(\widetilde{x}) - \lambda_j \sum_{i=1}^{n} (g_j(\widetilde{x}) - c_j)$$

On remarquera que ce Lagrangien ne contient pas explicitement les contraintes de non-négativité $x_i \geqslant 0,\ i = 1,...,n$.

Condition de qualification des contraintes : Ce sont les mêmes que dans le cas des programmes d'optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations.

Conditions du premier ordre (Kuhn et Tucker) : On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\widetilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ est une solution du programme de maximisation $\mathscr{P}$, alors il existe un unique vecteur $\widetilde{\lambda}^*$ tel que $\widetilde{x}^*$ vérifie les $3(n+m)$ conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \mathcal{M}(\widetilde{x}^*,\widetilde{\lambda}^*)}{\partial x_i} \leqslant 0 & \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^* . \dfrac{\partial g_j(\widetilde{x}^*)}{\partial x_i} \leqslant 0 & \forall i = 1,...,n \\ x_i^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow x_i^* \geqslant 0 & \forall i = 1,...,n \\ x_i^* . \dfrac{\partial \mathcal{M}(\widetilde{x}^*,\widetilde{\lambda}^*)}{\partial x_i} = 0 & \Leftrightarrow x_i^* = 0 \text{ ou } \dfrac{\partial \mathcal{M}(\widetilde{x}^*,\widetilde{\lambda}^*)}{\partial x_i} = 0 & \forall i = 1,...,n \\ \dfrac{\partial \mathcal{M}(\widetilde{x}^*,\widetilde{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j^*} \geqslant 0 & \Leftrightarrow g_j(\widetilde{x}^*) \leqslant c_j & \forall j = 1,...,m \\ \lambda_j^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow \lambda_j^* \geqslant 0 & \forall j = 1,...,m \\ \lambda_j^* (g_j(\widetilde{x}^*) - c_j) = 0 & \Leftrightarrow \lambda_j^* = 0 \text{ ou } g_j(\widetilde{x}^*) = c_j & \forall j = 1,...,m \end{array} \right.$$

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local : Elles sont identiques à celles du cas précédent (programme d'optimisation avec contraintes prenant la forme d'inéquations).

Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global : *Cf.* cas précédent.

En pratique, la résolution des programmes d'optimisation sous contraintes d'inéquations incluant des contraintes de non-négativité est compliquée par le fait que non seulement il faut envisager toutes les configurations possibles pour les λ_j, mais aussi toutes les configurations possibles pour les variables x_i : elles sont strictement positives à l'équilibre, toutes sauf une, deux,..., toutes sont nulles à l'optimum. Pour trouver la bonne solution, il faut ensuite procéder par élimination en montrant que parmi l'ensemble de ces possibilités, certaines aboutissent à des contradictions. Une solution pour laquelle un ou plusieurs x_i sont nuls à l'optimum est appelée « solution en coin ».

Note sur les programmes de minimisation *Cf.* remarques de la section précédente.

Exemple : Résoudre le programme de maximisation $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P}\left|\begin{array}{lrl} \max\limits_{x,y} & xy & \\ \text{s.c.} & x+y & \leqslant 6 \\ & x & \geqslant 0 \\ & y & \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Solution :

Le Lagrangien modifié associé ce programme s'écrit :

$$\mathcal{M}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y-6)$$

Condition de qualification des contraintes : Toutes les contraintes étant linéaires, la contrainte de qualification est automatiquement vérifiée.

CPO (Kuhn et Tucker) : Si (x^*, y^*, λ^*) est une solution du programme $\mathscr{P}$, alors :

$$\begin{array}{rcrl} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} \leqslant 0 & \Leftrightarrow & y^* - \lambda^* & \leqslant 0 \\ x^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x^* & \geqslant 0 \\ x^*.\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow & x^*(y^* - \lambda^*) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} \leqslant 0 & \Leftrightarrow & x^* - \lambda^* & \leqslant 0 \\ y^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow & y^* & \geqslant 0 \\ y^*.\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow & y^*(x^* - \lambda^*) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x^* + y^* & \leqslant 6 \\ \lambda^* \geqslant 0 & \Leftrightarrow & \lambda^* & \geqslant 0 \\ \lambda^*.\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \lambda} = 0 & \Leftrightarrow & \lambda^*(x^* + y^* - 6) & = 0 \end{array}$$

Pour déterminer les solutions de ce système, il faut théoriquement passer en revue tous les cas de figures possibles portant sur la saturation des contraintes (sur x,y et $x+y-6$), ce qui fait 9 combinaisons différentes. En réalité, on peut aboutir à la solution très rapidement en procédant comme suit :

- Cas $x^* > 0$. Alors, d'après la troisième condition : $y^* = \lambda^*$.
  - Si $y^* = 0$, alors $\lambda^* = 0$, donc $x^* \leqslant 0$ d'après la quatrième condition, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ ($x^* > 0$).
  - Donc $y^* > 0$, ce qui implique $x^* = \lambda^*$ d'après la cinquième condition. La dernière condition implique alors que $x^* = y^* = \lambda^* = 3$.
- Cas $x^* = 0$. Alors :
  - Si $y^* > 0$, alors $\lambda^* = x^* = 0$ d'après la sixième condition. Mais alors, la première condition contredit l'hypothèse $y^* > 0$.
  - Donc $y^* = 0$. La dernière condition implique alors que $x^* = y^* = \lambda^* = 0$.

Finalement, on en déduit que les conditions de Kuhn et Tucker admettent deux solutions pour (x^*, y^*, λ^*) : $(3, 3, 3)$ et $(0, 0, 0)$.

CSO : La fonction f est deux fois dérivable et quasi-concave et les contraintes sont linéaires. Par conséquent, si les dérivées partielles f'_i de f évaluées en (x^*, y^*, λ^*) sont non nulles, alors (x^*, y^*, λ^*) est un maximum global. C'est le cas pour la solution $(x^*, y^*) = (3, 3)$. En revanche, comme les dérivées partielles de f s'annulent en (0,0), on peut savoir à ce stade si la solution $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est ou non un maximum global. Pour déterminer lequel de ces deux points est le maximum global du programme $\mathscr{P}$, il faut alors comparer les valeurs de f en ces deux points : comme $f(3, 3) > f(0, 0)$, le point $(x^*, y^*) = (3, 3)$ est le maximum global du programme.

Ccl : Le programme $\mathscr{P}$ admet un maximum global en $(3, 3)$.