TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

Vade mecum : Calcul des taux de croissance

Cette annexe aux TD sur la croissance expose la méthode de calcul des taux de croissance en temps continu et en temps discret.

1 Temps continu

Soit $y = f(t)$ une variable dont l'évolution au cours du temps est décrite par la fonction f.

Taux de croissance d'une variable : La dérivée de la variable y par rapport au temps est par convention notée $\dot{y} = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$ et indique la variation instantanée de y en t.

Le taux de croissance de cette fonction, noté g_y est défini comme le rapport de cette variation temporelle à la valeur de la fonction f en un instant t du temps, soit :

$$g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\frac{\partial f(t)}{\partial t}}{f(t)}$$

Taux de croissance d'un produit de variables : Dans la plupart des applications économiques, la fonction f s'écrit souvent comme le produit de plusieurs variables qui dépendent ou pas du temps :

$$f(t) = kh(t)^{\alpha} l(t)^{\beta} \tag{1}$$

Pour calculer le taux de croissance de y en fonction du taux de croissance de ces autres variables, on utilise la propriété suivante :

$$\boxed{g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\partial \ln f(t)}{\partial t}}$$

Autrement dit, le taux de croissance d'une variable qui dépend du temps n'est rien d'autre que la dérivée du logarithme de cette variable par rapport au temps.

Utilisons cette propriété pour calculer le taux de croissance de f en fonction du taux de croissance des variables du membre de droite de l'équation (1). On commence par calculer le logarithme de y :

$$\ln y = \ln f(t) = \ln k + \alpha \ln h(t) + \beta \ln l(t)$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{\partial \ln f(t)}{\partial t} = \frac{\partial \ln k}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \ln h(t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial \ln l(t)}{\partial t}$$

soit :

$$g_y = \alpha . g_h + \beta . g_l$$

où g_h et g_l désignent les taux de croissance des variables dont l'évolution au cours du temps est décrite par les fonctions h et l respectivement.

Exemple-type : On demande de calculer le taux de croissance d'une la variable Y qui vérifie l'équation suivante :

$$Y(t) = \frac{[A(t)]^\alpha [B(t)]^\beta}{[C(t)]^\gamma}$$

En utilisant la méthode de log-différenciation, on montre aisément que :

$$g_y = \alpha.g_A + \beta.g_B - \gamma.g_C$$

Propriété importante : si une variable y croît au taux constant a, alors :

$$\boxed{y = f(t) = e^{at} f(0)}$$

La démonstration de cette propriété est une application directe de la méthode de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre. La solution générale d'une équation du type $\dot{x} = ax$ est $x(t) = ke^{at}$. Pour s'en convaincre, il suffit de différencier ke^{at} par rapport à t et vérifier que l'équation différentielle est satisfaite : sa dérivée est en effet a fois elle-même. Pour trouver la valeur de k, il suffit d'annuler cette équation, ce qui donne : $k = x(0)$.

2 Temps discret

Dans de nombreux modèles, on ne considère pas l'évolution d'une variable y en chaque point du temps, mais plutôt à intervalles réguliers : t, $t+1$, $t+2$, etc.

Taux de croissance d'une variable : Dans ce cas, on note y_t la valeur de la variable y à l'instant t. Son taux de croissance g_y entre t et $t+1$ est donné par la formule :

$$g_y = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \frac{\Delta y_t}{y_t}$$

Taux de croissance d'un produit de variables : Supposons que la variable y soit elle-même le produit d'autres variables k (constante au cours du temps), g_t et h_t (variables au cours du temps) :

$$y_t = k(h_t)^\alpha (l_t)^\beta$$

Pour calculer le taux de croissance de y en fonction du taux de croissance de ces autres variables, on utilise l'approximation suivante :

$$\boxed{g_y = \frac{y_{t+1}-y_t}{y_t} \approx \ln y_{t+1} - \ln y_t}$$

lorsque y_{t+1} est proche de y_t. Cette approximation est une application directe de la propriété : $\ln x \sim x - 1$ lorsque $x \to 1$.

En utilisant cette approximation et en notant g_h et g_l les taux de croissance respectifs de h_t et l_t, on a :

$$g_y \approx \ln y_{t+1} - \ln y_t \approx \alpha.g_h + \beta.g_l$$

Propriété importante : si une variable y en temps discret croît au taux constant a, alors sa valeur à la date t est donnée par la formule :

$$\boxed{y_t = (1+a)^{t+1} y_0}$$

Cette propriété s'obtient par récurrence :

$$\begin{aligned}
y_t &= (1+a)y_{t-1} \\
y_{t-1} &= (1+a)y_{t-2} \\
&... \\
y_{i+1} &= (1-a)y_i \\
&... \\
y_1 &= (1+a)y_0
\end{aligned}$$