TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

Vade mecum : Equations différentielles du premier ordre

Cette annexe aux TD sur le modèle de Solow présente la méthode de résolution des équations linéaires du premier ordre et définit la notion d'état stationnaire.

1 Définitions

1.1 Equations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première :

$$\dot{y}(t) = f\left(y(t)\right)$$

Exemple : $\dot{y}(t) = 2y(t)$

Cette équation impose pour être résolue de trouver une fonction $y(t)$ dont la dérivée première est égale à deux fois cette fonction. Une solution de cette équation est $y(t) = e^{2t}$ puisque sa dérivée $\dot{y}(t)$ est $2e^{2t} = 2y(t)$. Remarquons, dans ce cas, que pour n'importe quelle constante k, $y(t) = ke^{2t}$ est aussi une solution de cette équation. Une équation différentielle est toujours telle que plusieurs solutions sont possibles en fonction de la valeur d'une constante.

1.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Deux catégories d'équations linéaires du premier ordre sont particulièrement utilisées en économie.

type 1 : $\boxed{\dot{y} = ay}$
où a est une constante. La solution générale de cette équation est :

$$y(t) = ke^{at}$$

La démonstration consiste simplement à différencier ke^{at} et à regarder si l'équation différentielle est satisfaite ; sa dérivée est en effet k fois elle-même. La constante k est déterminée par la valeur initiale $y(0)$ de $y(t)$, d'où :

$$y(t) = y(0)e^{at}$$

type 2 : $\boxed{\dot{y} = ay + b}$
où a et b sont des constantes non nulles. La solution générale de cette équation est :

$$y(t) = -\frac{b}{a} + ke^{at}$$

Pour vérifier ce résultat, remplaçons la solution possible dans l'équation et regardons si cette dernière est vérifiée :

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= ake^{at} \\
ay(t) + b &= (-b + ake^{at}) + b = ake^{at}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\dot{y}(t) = ay(t) + b$, donc notre solution possible constitue vraiment une solution. La constante k est déterminée par la valeur initiale $y(0)$ de $y(t)$, d'où :

$$y(t) = -\frac{b}{a} + \left(y(0) + \frac{b}{a}\right) e^{at}$$

1.3 Système d'équations différentielles du premier ordre

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à la dynamique d'une seule vairable y dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle $\dot{y} = f(y)$. Cependant, dans de nombreuses applications économiques, il existe de nombreuses interdépendances entre les variables. Cette constatation nous amène à étudier la dynamique des systèmes de deux équations différentielles.

La dynamique de eux variables y et x est en général donnée par le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, y) \\
\dot{y} &= g(x, y)
\end{aligned}
$$

2 Solution stationnaire

2.1 Equations différentielles du premier ordre

Soit l'équation différentielle du premier ordre $\dot{y}(t) = f(y(t))$. Une solution constante $y(t) = y^*$ de cette équation différentielle est appelé solution stationnaire (ou simplement équilibre) de cette équation.

Puisque $\dot{y}(t) = 0$ pour une solution d'état stationnaire, le point y^* est une solution stationnaire si et seulement si :

$$f(y^*) = 0$$

Exemple : $\dot{y} = 3y - 2$
Une solution stationnaire non nulle de cette équation est donné par :

$$\dot{y} = 0 = 2y^* - 3 \Rightarrow y^* = \frac{2}{3}$$

2.2 Système d'équations différentielles du premier ordre

Dans le cas d'un système de deux équations différentielles du premier ordre, un point (x^*, y^*) est un état stationnaire du système si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
\dot{x^*} = f(x^*, y^*) &= 0 \\
\dot{y^*} = g(x^*, y^*) &= 0
\end{aligned}
$$

3 Stabilité d'un état stationnaire

A quelle condition un état stationnaire est-il stable ? Autrement dit, si l'on s'écarte un peu de cet équilibre, existe-t-il une force de rappel permettant d'y retourner ?

3.1 Equations différentielles du premier ordre

Soit $\dot{y} = f(y)$. L'équilibre stationnaire de cette équation différentielle y^* est stable si et seulement si :

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = f'(y) < 0$$

Application : équations différentielles linéaires Dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre du type $\dot{y} = ay + b$, la condition précédente implique que l'équilibre n'est stable que si $a < 0$. Dans ce cas en effet, quelle que soit la valeur initiale $y(0)$, $y(t)$ va converger vers l'équilibre stationnaire y^* lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour le voir, supposons que y vérifie l'équation différentielle $\dot{y} = ay + b$. Dans ce cas, on sait que la solution de cette équation s'écrit :

$$y(t) = -\frac{b}{a} + y(0)e^{at}$$

Si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^* = -\frac{b}{a}$, quelle que soit la valeur initiale $y(0)$.

3.2 Système d'équations différentielles du premier ordre

On considère le système à deux équations suivant :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, y) \\ \dot{y} & = & g(x, y) \end{array}$$

On suppose que f et g sont des fonctions continûment différentiables.

Soit (x^*, y^*) un état stationnaire de ce système d'équations différentielles du premier ordre. On appelle $M(x, y)$ la matrice des dérivées premières de f et g au point (x, y) :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Une condition suffisante pour prouver la stabilité de cet équilibre est que les valeurs propres de la matrice $M(x^*, y^*)$ des dérivées premières de f et g en (x^*, y^*) soient toutes deux négatives ou, si elles sont complexes, que leur partie réelle soit négative.

Comment savoir si les valeurs propres d'une matrice $(2, 2)$ sont négatives ? Supposons que la matrice $M(x^*, y^*)$ soit de la forme :

$$M(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On commence par soustraire un scalaire r à chaque élément de la diagonale principale de M :

$$M(x^*, y^*) - rI = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le polynôme caractéristique de cette matrice en calculant son déterminant :

$$\begin{aligned}\det(M(x^*, y^*) - rI) &= (a_{11} - r)(a_{22} - r) - a_{12}a_{21} \\ &= r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).\end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré admet deux racines négatives (ou a partie réelle négative) si et seulement si :
(1) $\det(M) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$
(2) $\mathrm{tr}(M) = (a_{11} + a_{22}) < 0$
Ces deux conditions garantissent la stabilité de l'équilibre stationnaire (x^*, y^*).

Le signe du déterminant de l'équation caractéristique permet de préciser la nature des trajectoires qui ramènent à l'équilibre. Ce determinant s'écrit :

$$\Delta = (\mathrm{tr}(M))^2 - 4.\det(M) = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

(a) Si $\Delta > 0$ (les valeurs propres sont réelles), la trajectoire est dite **« en puits »** : pour x proche de x^* et y proche de y^*, les trajectoires convergent vers l'équilibre stationnaire comme l'eau vers un puits.

(b) Si $\Delta < 0$ (les valeurs propres sont complexes), la trajectoire est dite **« oscillatoire »** : pour x proche de x^* et y proche de y^*, les trajectoires convergent vers l'équilibre stationnaire en décrivant une spirale.