

TD 1 : LA FONCTION DE PRODUCTION

Séance du 25 octobre 2007

Objectifs du TD :

1. Se familiariser avec un certain nombre de notions indispensables à l'analyse micro-économique de la production : isoquante, rendements factoriels, rendements d'échelle, taux marginal de substitution technique et élasticité de substitution.
2. Connaître les propriétés des principales fonctions de production utilisées dans la littérature économique.

Exercice 1 : La fonction de production Cobb-Douglas

On considère la fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs (capital K et travail L) :

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$$

1. Quelle interprétation peut-on donner du terme A ?
2. Tracer l'isoquante correspondant aux valeurs suivantes des paramètres : $Y = 10$, $A = 1$ et $\alpha = \beta = 1$.
3. A quelle condition cette fonction est-elle à rendements d'échelle constants ?
Rappel : une technologie $y = f(\tilde{x})$ (où \tilde{x} désigne le vecteur d'inputs (x_1, x_2, \dots, x_n)) présente des rendements d'échelle constants lorsque $f(t\tilde{x}) = tf(\tilde{x}) \forall t \geq 0$.
4. Calculez la productivité marginale et la productivité moyenne du capital et du travail.
5. Le taux marginal de substitution technique (TMST) du travail au capital (noté $TMST_{L,K}$) est défini comme la variation de travail nécessaire pour compenser une variation infinitésimale de capital de telle sorte que le niveau d'output soit maintenu constant, soit $TMST_{L,K} = -\frac{dL}{dK} \Big|_{dY=0} = -\frac{\partial F(K,L)/\partial K}{\partial F(K,L)/\partial L}$. Calculez cette quantité dans le cas de la fonction de production Cobb-Douglas. En donner une interprétation géométrique.
6. L'élasticité de substitution est définie comme le rapport de la variation relative des facteurs à la variation relative du TMST, soit :

$$\sigma_{L,K} = \frac{d \ln(L/K)}{d \ln |TMST_{L,K}|} = -\frac{\frac{d(L/K)}{L/K}}{\frac{d|TMST_{L,K}|}{|TMST_{L,K}|}}$$

Calculer l'élasticité de substitution des facteurs de la fonction Cobb-Douglas. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 2 : La fonction de production Leontief

On considère la fonction de production Leontief (ou à facteurs complémentaires) :

$$Y = F(K, L) = \min(aK, bL)$$

1. Tracer l'isoquante correspondant aux valeurs suivantes des paramètres : $Y = 1$, $a = 2$ et $b = 1$.
2. Calculer le TMST du capital au travail.
3. Calculer l'élasticité de substitution des deux facteurs. Qu'en conclure ?
4. Parmi les facteurs de production suivants : travail qualifié, travail non qualifié, capital, lesquels vous paraissent complémentaires ? substituables ?

Exercice 3 : La fonction de production CES

On considère la fonction de production CES (pour *Constant Elasticity of Substitution*) :

$$Y = F(K, L) = [\alpha(aK)^\rho + (1 - \alpha)(bL)^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

1. Montrer que cette fonction admet des rendements d'échelle constants.
2. Calculer le TMST du travail au capital.
3. Calculer l'élasticité de substitution des deux facteurs. Qu'en conclure ?
4. Montrer que lorsque le paramètre ρ tend vers $-\infty$, la fonction CES se confond avec une fonction de type Leontief.
5. En utilisant la règle de l'Hôpital, montrer que lorsque le paramètre ρ tend vers 0, la fonction CES se confond avec une fonction Cobb-Douglas. Pour simplifier les calculs, on supposera que $a = b = 1$.

Règle de l'Hôpital : soient f et g deux fonctions définies et continues sur $]a, b]$ et différentiables sur $]a, b[$. On suppose que $f(b) = g(b) = 0$ et que pour tout x de $]a, b[$, $g'(x) \neq 0$. Alors, sous réserve d'existence de la seconde limite :

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cette règle est une application du théorème de Rolle.