TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

TD 10 : Tests empiriques du modèle de Solow

Séance du 11 janvier 2007

Le modèle de Solow a fait l'objet de nombreuses tentatives de validation empirique. Deux approches distinctes ont été privilégiées dans la littérature : une analyse comptable tendant à estimer la part des différents facteurs dans la croissance du revenu par tête ; une analyse en niveau visant à expliquer les écarts de revenu par tête entre les différents pays.

Exercice 1 : décomposition comptable de la croissance

On considère une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs de production, le capital $K(t)$ et le travail $L(t)$:

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} \tag{1}$$

Le progrès technique est supposé exogène et la concurrence parfaite sur le marché du travail et le marché du capital. On note g_x le taux de croissance de la variable x où $x \in \{A, K, L\}$.

1. On note θ_K la part des revenus du capital dans la valeur ajoutée et θ_L la part des revenus du travail dans la valeur ajoutée. Montrer que l'hypothèse de concurrence parfaite implique que $\alpha = \theta_K$ et $1 - \alpha = \theta_L$.
2. En déduire la relation suivante :

$$g_Y = g_A + \theta_K.g_K + \theta_L.g_L \tag{2}$$

   Parmi les termes de cette équation, quels sont ceux qu'on peut mesurer empiriquement ?
3. On appelle « résidu de Solow » la partie de la croissance qui n'est pas expliquée par l'accumulation des facteurs (capital et travail). Ce résidu constitue la contrepartie empirique de g_A dans l'équation (2). Calculer le résidu de Solow pour l'économie américaine sur la période 1950-2000. On donne les taux de croissance annuels suivants : $g_Y = 3.5\%$, $g_L = 1.5\%$, $g_K = 3\%$ et $\theta_K = 1 - \theta_L = \frac{1}{3}$. Quelle est la part du résidu de Solow dans la croissance de l'économie ? Dans quelle mesure ce résidu conduit-il à surestimer la part du progrès technique dans la croissance ?
4. Le tableau 1 présente le calcul de la décomposition de la croissance pour un certain nombre de pays. Quelles réflexions ce tableau vous inspire-t-il ?

Exercice 2 : expliquer les écarts de revenu par tête

Dans un article intitulé « A contribution to the Empirics of Economic Growth » et publié en 1992 dans le *Quarterly Journal of Economics*, G. Mankiw, D. Romer et D. Weil proposent de prendre le modèle de Solow *au sérieux* et d'en tester la validité empirique sur un échantillon d'une centaine de pays.

Partie A : le modèle standard explique-t-il les écarts entre pays ?

On suppose que l'économie admet la fonction de production Cobb-Douglas avec facteur technologique neutre au sens de Harrod :

$$Y = K(t)^{\alpha} \left[A(t)L(t)\right]^{1-\alpha}$$

Une faction s de la production est investie à chaque période. Le capital se déprécie au taux δ. Le capital s'accumule donc selon l'équation suivante :

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K$$

Enfin, on suppose que la productivité globale des facteurs $A(t)$ et la population $L(t)$ croissent aux taux constants g_A et g_L.

1. On rappelle qu'à l'état stationnaire, le PIB par unité de travail efficace $y_t = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$ s'écrit $y^* = \left(\frac{s}{g_A+g_L+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Montrer que le logarithme du revenu par tête s'écrit :

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right)^* = \ln A(0) + g_A.t + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(g_A + g_L + \delta)$$

2. On suppose comme précédemment que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale, si bien que $\alpha = \frac{1}{3}$. Quelles sont les valeurs attendues de l'élasticité du revenu par tête au taux d'épargne et par rapport à $(g_A + g_L + \delta)$?
3. On considère un échantillon de pays observés à une date donnée (par convention, $t = 0$). Les auteurs font l'hypothèse que δ et g_A sont identiques pour tous les pays. la technologie disponible en $t = 0$ est quant à elle susceptible de varier d'un pays à l'autre. Les auteurs supposent donc que $\ln[A(0)]_i = a + \epsilon_i$ où a est une constante et ϵ_i est un effet spécifique à chaque pays i. Montrer que le modèle peut être estimé en appliquant la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) à l'équation suivante :

$$\ln\left(\frac{Y_i}{L_i}\right) = a + b\ln(s_i) + c\ln(g_A + g_{L_i} + \delta) + \epsilon_i$$

où i désigne le pays i et ϵ_i est un terme d'erreur de moyenne nulle et de variance σ_ϵ. A quelles conditions portant sur s_i et g_{L_i} les coefficients estimés par MCO seront-ils non biaisés ?
4. Le tableau 2 reproduit les résultats obtenus par Mankiw, Romer et Weil. Commenter. Les coefficients ainsi estimés sont-ils compatibles avec l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{3}$?

Partie B : le modèle de Solow « augmenté »

Pour tenter de réconcilier les données avec le modèle de Solow, les auteurs proposent d'introduire le capital humain comme variable explicative supplémentaire, la fonction de production s'écrivant :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} \left[A(t)L(t)\right]^{1-\alpha-\beta}$$

où $\alpha + \beta < 1$. Le capital humain est supposé s'accumuler suivant la loi $\dot{H} = s_H Y(t) - \delta H$. On note désormais $s = s_K$ le taux d'épargne du capital physique et on introduit $h(t) = \frac{H(t)}{A(t)L(t)}$ le capital humain par unité de travail efficace.

1. Quel argument économique justifie l'inclusion du capital humain dans le modèle de Solow ?
2. Montrer que le capital physique et le capital humain vérifient les équations d'accumulation suivantes (on omet les indices temporels) :

$$\frac{\dot{k}}{k} = s_K k^{\alpha-1} h^{\beta} - (g_A + g_L + \delta) \quad (3)$$

$$\frac{\dot{h}}{h} = s_H k^{\alpha} h^{\beta-1} - (g_A + g_L + \delta) \quad (4)$$

3. Montrer qu'il y a convergence vers un état stationnaire tel que :

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta} s_H^{\beta}}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (5)$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (6)$$

   Indication : poser $u = \frac{k}{h}$ et calculer l'équilibre stationnaire u^* de u.
4. Comment s'écrit le logarithme du revenu par tête à l'équilibre stationnaire en fonction de $A(0)$, g_A, g_L, δ, s_K et s_H ? (cf. question 1 de la partie A). Quel mécanisme économique explique que le coefficient de $\ln s_K$ dans le modèle de Solow augmenté soit supérieur à celui du modèle standard ?
5. Le tableau 3 reproduit les résultats qu'obtiennent les auteurs lorsqu'ils estiment le modèle de Solow augmenté. Ils approximent le taux d'accumulation du capital humain par la proportion de la population en age de travailler qui est scolarisée dans le secondaire (SCHOOL). Commenter les résultats. On suppose généralement que le coefficient β est proche de 0.3 : les coefficients de la régression sont-ils compatibles avec l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{3}$?

Partie C : le modèle prédit-il la convergence entre les pays ?

Le modèle étudié jusqu'à présent repose sur l'hypothèse que les économies ont atteint leur état stationnaire. Cela n'est pas nécessairement le cas.

1. Hors de l'état stationnaire, le modèle de Solow prédit que les économies doivent converger vers leur état stationnaire de long terme d'autant plus rapidement qu'elles en sont initialement éloignées (cf. TD 9). Longtemps, les économistes ont considéré que cette prédiction signifiaient que tous les pays convergeaient vers le *même* niveau de revenu, autrement dit que le taux de croissance du revenu par tête était négativement corrélé au revenu par tête initial. Au vu des résultats du tableau mankiw3 (régression du taux de croissance du PIB par tête entre 1960 et 1985 sur le PIB par tête en 1960), cette prédiction vous paraît-elle vérifiée empiriquement ?
2. En réalité, le modèle de Solow ne prédit pas que tous les pays convergent vers un même niveau de revenu par tête, mais plutôt qu'ils convergent vers un état stationnaire qui dépend des paramètres s, g_A, g_L et δ. C'est pourquoi il vaut mieux parler de convergence *conditionnelle*. Commenter les résultats obtenus lorsque ces paramètres sont inclus dans la régression (cf. tableau 5).

Exercice 3 : *It's not factor accumulation...*

Les résultats de Mankiw, Romer et Weil (MRW) ont suscité d'intenses controverses sur la part respective du progrès technique et de l'accumulation des facteurs dans la croissance. Dans « It's not Factor Accumulation » (2001), W. Easterly et R. Levine présentent les principales critiques adressées au travail séminal de MRW.

1. Easterly et Levine estiment un modèle de Solow augmenté similaire à celui présenté dans le tableau 3 de l'article de MRW, mais sans contraindre le coefficient a associé à la productivité globale des facteurs $A(0)$ à être le même pour tous les pays. Ils trouvent que les niveaux de productivité globale des facteurs ainsi estimés sont très différents d'un pays à l'autre et que les coefficient associés à s_K et $\ln(g_A + g_L + \delta)$ ne sont plus significatifs. Quelles hypothèses du modèle estimé par MRW ces résultats remettent-ils en cause ?
2. L'inclusion d'une mesure de capital humain dans la régression effectuée par MRW repose sur l'hypothèse que la causalité est à sens unique, du capital humain vers le revenu par tête. En quoi cette hypothèse est-elle critiquable ? En quel sens tend-elle à biaiser les résultats de MRW ?
3. Le graphique de la figure 1 présente une mesure de l'évolution du revenu par tête entre 1820 et 1992 pour un grand nombre de pays. Le terme de « convergence »vous paraît-il approprié pour qualifier l'évolution de la dispersion du revenu par tête dans le monde ? Quel problème pose l'inclusion du niveau initial d'éducation dans la régression effectuée par MRW pour tester l'hypothèse de convergence conditionnelle ?

Tab. 1: *Décomposition comptable de la croissance. Source : Easterly et Levine, « It's Not Factor Accumulation », 2001.*

	α	GDP Growth	Share Contributed by:		
			Capital	Labor	TFP
OECD 1947-73					
France	0.40	5.40%	41%	4%	55%
Germany	0.39	6.61%	41%	3%	56%
Italy	0.39	5.30%	34%	2%	64%
Japan	0.39	9.50%	35%	23%	42%
United Kingdom	0.38	3.70%	47%	1%	52%
United States	0.40	4.00%	43%	24%	33%
OECD 1960-90					
France	.42	3.50%	58%	1%	41%
Germany	.40	3.20%	59%	-8%	49%
Italy	.38	4.10%	49%	3%	48%
Japan	.42	6.81%	57%	14%	29%
United Kingdom	.39	2.49%	52%	-4%	52%
United States	.41	3.10%	45%	42%	13%
Latin America 1940-1980					
Argentina	0.54	3.60%	43%	26%	31%
Brazil	0.45	6.40%	51%	20%	29%
Chile	0.52	3.80%	34%	26%	40%
Mexico	0.69	6.30%	40%	23%	37%
Venezuela	0.55	5.20%	57%	34%	9%
East Asia 1966-90					
Hong Kong	0.37	7.30%	42%	28%	30%
Singapore	0.53	8.50%	73%	32%	-5%
South Korea	0.32	10.32%	46%	42%	12%
Taiwan	0.29	9.10%	40%	40%	20%

OECD figures from Christenson, Cummings, and Jorgenson (1980) and Dougherty (1991)
Latin American figures from Elias (1990).
East Asia figures from Young (1994).

Tab. 2: *Estimation du modèle de Solow. Source : Mankiw, Romer & Weil (1992)*

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	5.48	5.36	7.97
	(1.59)	(1.55)	(2.48)
ln(I/GDP)	1.42	1.31	0.50
	(0.14)	(0.17)	(0.43)
$\ln(n + g + \delta)$	−1.97	−2.01	−0.76
	(0.56)	(0.53)	(0.84)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.01
s.e.e.	0.69	0.61	0.38
Restricted regression:			
CONSTANT	6.87	7.10	8.62
	(0.12)	(0.15)	(0.53)
$\ln(\text{I/GDP}) - \ln(n + g + \delta)$	1.48	1.43	0.56
	(0.12)	(0.14)	(0.36)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.06
s.e.e.	0.69	0.61	0.37
Test of restriction:			
p-value	0.38	0.26	0.79
Implied α	0.60	0.59	0.36
	(0.02)	(0.02)	(0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

Tab. 3: *Estimation du modèle de Solow « augmenté ». Source : Mankiw, Romer & Weil (1992)*

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.89	7.81	8.63
	(1.17)	(1.19)	(2.19)
ln(I/GDP)	0.69	0.70	0.28
	(0.13)	(0.15)	(0.39)
$\ln(n + g + \delta)$	−1.73	−1.50	−1.07
	(0.41)	(0.40)	(0.75)
ln(SCHOOL)	0.66	0.73	0.76
	(0.07)	(0.10)	(0.29)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.24
s.e.e.	0.51	0.45	0.33

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.

Tab. 4: *Test de la convergence inconditionnelle. Source : Mankiw, Romer & Weil (1992)*

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	−0.266	0.587	3.69
	(0.380)	(0.433)	(0.68)
ln(Y60)	0.0943	−0.00423	−0.341
	(0.0496)	(0.05484)	(0.079)
$\overline{R}^2$	0.03	−0.01	0.46
s.e.e.	0.44	0.41	0.18
Implied λ	−0.00360	0.00017	0.0167
	(0.00219)	(0.00218)	(0.0023)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960.

Tab. 5: *Test de la convergence conditionnelle. Source : Mankiw, Romer & Weil (1992)*

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	1.93	2.23	2.19
	(0.83)	(0.86)	(1.17)
ln(Y60)	−0.141	−0.228	−0.351
	(0.052)	(0.057)	(0.066)
ln(I/GDP)	0.647	0.644	0.392
	(0.087)	(0.104)	(0.176)
$\ln(n + g + \delta)$	−0.299	−0.464	−0.753
	(0.304)	(0.307)	(0.341)
$\overline{R}^2$	0.38	0.35	0.62
s.e.e.	0.35	0.33	0.15
Implied λ	0.00606	0.0104	0.0173
	(0.00182)	(0.0019)	(0.0019)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

Fig. 1: *Évolution d'une mesure du revenu par tête entre 1820 et 1992 pour un grand nombre de pays. Source : Easterly et Levine (2001)*