TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

TD 11 : La croissance endogène (Paul Romer)

Séance du 18 janvier 2007

Le TD précédent a mis en évidence les limites empiriques du modèle de Solow. Si l'accumulation des facteurs a un pouvoir explicatif certain pour expliquer les écarts de revenus entre pays, l'essentiel est ailleurs : le progrès technique ne croît pas partout à la même vitesse. Or le modèle de Solow ne permet pas de comprendre les écarts de taux de croissance du progrès technique, dans la mesure où la connaissance est supposée être un bien public accessible à tous sans coût. Les économistes de la croissance endogène ont élaboré des modèles permettant d'endogénéiser le progrès technique, au prix de deux déviations par rapport au hypothèses du modèle standard de croissance néoclassique : d'une part, l'existence d'*externalités* dans l'accumulation de connaissances (la connaissance est un processus cumulatif) ; d'autre part, l'existence de rentes de monopoles permettant de financer la production de nouvelles connaissances (concurrence monopolistique).

Exercice 1 : La concurrence monopolistique

Les rendements croissants permettent de construire une théorie de la croissance soutenable, où la motivation économique est à la source de la croissance. Dans les différents modèles de croissance endogène, l'existence de rendements croissants dans la technologie de production provient de l'existence d'une différenciation horizontale des produits qui s'accompagne d'une forme particulière de concurrence entre les firmes : la *concurrence monopolistique*. L'objectif de cet exercice est de dériver les principales propriétés de ce type de concurrence.

On considère une économie composée d'un ensemble de I consommateurs identiques et d'un *continuum* de variétés de masse J d'un bien différencié, ces variétés étant indicées par $j \in [0, J]$. Toutes les grandeurs relatives aux variétés du bien sont donc décrites par des densités continues sur l'intervalle des variétés $[0, J]$.

Les consommateurs

Chaque individu i consomme un panier composé de toutes les variétés i du bien différencié. Ses préférences sont représentées par une fonction d'utilité dite « Dixit-Stiglitz »[1] qui s'écrit :

$$U_i = \left(\int_0^J (c_{ij})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

[1] Du nom des auteurs qui ont les premiers étudié les propriétés de cette fonction, dans un article intitulé « Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity « et publié en 1977 dans l'*American Economic Review*.

1. A quelle famille de fonctions étudiée au premier TD cette fonction d'utilité appartient-elle ? Comment s'interprète dès lors le paramètre σ ? Vers quel type de fonction U_i tend-elle lorsque $\sigma \to 0$ (la démonstration formelle n'est pas demandée) ? Lorsque $\sigma \to +\infty$? Quelle est la limite de $\ln(U_i)$ lorsque $\sigma \to 1$? En quoi le paramètre σ peut-il s'interpréter comme une mesure de la concurrence ?
2. Supposons que la consommation de chaque bien c_j soit constante ($c_j = c$, $\forall j$) et que $\sigma > 1$. Comment s'écrit U_i dans ce cas ? En déduire que les préférences à la Dixit-Stiglitz traduisent une préférence pour la diversité.
3. On suppose que le consommateur dispose d'un revenu E_i. On note p_j le prix de chaque variété j. Écrire et résoudre le programme d'optimisation du consommateur. Montrer que les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_{ij}^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\int_0^J c_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} &= \lambda p_j & (1) \\ \int_0^J p_j c_{ij} dj &= E_i & (2) \end{aligned}$$

4. Déduire de ces deux équations que la demande marshalienne de bien j par le consommateur i s'écrit :
$$c_{ij}(p_j, E_i) = \left(\frac{E_i}{P}\right) \left(\frac{p_j}{P}\right)^{-\sigma}$$
où P est un indice de prix composite défini par : $P = \left(\int_0^J p_j^{1-\sigma} dj \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$. Commenter cette équation.
5. Comment s'écrit la demande marshallienne $c_j(p_j, E)$ de bien j de tous les consommateurs réunis ? Le comportement des I consommateurs peut-il être représenté par celui d'un consommateur unique (qu'on appelle « consommateur représentatif ») ?

Les firmes

On suppose que les variétés j du bien de consommmation sont produites par un continuum de firmes de masse J (une firme est en monopole sur chaque variété). Le fait de supposer que le nombre de firmes est donné par un continuum permet d'appréhender l'idée simple, mais fondamentale, qu'une firme peut être de taille négligeable par rapport à l'ensemble de l'économie, mais néanmoins disposer d'un certain pouvoir de monopole sur son marché.

1. On suppose que toutes les firmes ont le même coût marginal de production constant et égal à θ. Écrire le profit de la firme j en fonction du niveau d'output qu'elle produit y_j, du prix de vente p_j et du coût marginal θ.
2. Contrairement à la situation de concurrence parfaite, la firme n'est pas ici *price taker* sur le marché de l'output, autrement dit, elle ne choisit pas uniquement le niveau de production y_j^*, mais aussi le prix de vente p_j^* qui maximise son profit. En remarquant que $y_j = c_j$ et en maximisant le profit de la firme par rapport à p_j, montrer que celle-ci fixe son prix de telle sorte que :
$$p_j^* = p = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\theta \quad \forall j$$
Commenter.

3. En déduire que chaque firme produit la quantité :

$$y_j^* = y = \frac{\sigma - 1}{\sigma}\left(\frac{E}{J\theta}\right) \quad \forall j$$

et que son profit s'écrit :

$$\pi_j^* = \pi = \frac{E}{J\sigma} \quad \forall j$$

Exercice 2 : Le modèle de croissance endogène de Romer

Cet exercice propose une version simplifiée du modèle de croissance endogène développé par Paul Romer, intitulé « Endogenous technical change » et publié en 1990 dans le *Journal of Political Economy.*

On suppose que l'économie est représentée par une firme représentative dont la fonction de production est :

$$Y = L_1^{1-\alpha} X \quad (\alpha < 1)$$

où L_1 représente le facteur travail et X est un agrégat composé de A biens intermédiaires :

$$X = \sum_{i=1}^{A} x_i^{\alpha} \quad (\alpha < 1)$$

si bien que :

$$Y = L_1^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{A} x_i^{\alpha} \tag{3}$$

Le secteur de production du bien final est supposé parfaitement concurrentiel.

Partie A : la production de bien final

1. Montrer que la fonction de production (3) admet des rendements d'échelle constants. Que peut-on en déduire sur le profit de la firme représentative à l'équilibre ?
2. On cherche à calculer la demande de bien intermédiaire x_i de la firme représentative produisant Y. Le prix de vente du bien final est normalisé à 1. On note p_i le prix d'achat du bien intermédiaire i et w le salaire versé aux travailleurs. Montrer que la demande de bien intermédiaire i de la firme représentative peut s'écrire :

$$x_i(p_i) = \left(\frac{\alpha}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_1 \tag{4}$$

Partie B : la production des biens intermédiaires

On suppose que chaque bien intermédiaire i est produit par une firme en monopole (du fait de l'existence de brevets). On suppose que le coût marginal de production de la firme est constant, si bien que sa fonction de coût s'écrit : $C(x_i) = cx_i$.

1. La firme étant en monopole, elle choisit le prix p_i de vente du bien intermédiaire i qui maximise son profit. En vous inspirant de l'exercice 1, montrer que le prix choisit par la firme s'écrit :

$$p_i = \frac{c}{\alpha}$$

   Commenter. Comment le paramètre α s'interprète-t-il ici ?

2. Montrer que le profit de la firme s'écrit :

$$\pi_i = \frac{1-\alpha}{\alpha} c x_i$$

Commenter.

3. Toutes les firmes produisant des biens intermédiaires ayant les mêmes caractéristiques et faisant face à la même demande (cf. l'équation (4)), elles produisent toutes la même quantité de bien, vendue au même prix : $\forall i,\ x_i = x$ et $p_i = p$. Montrer que la fonction de production de bien final (5) se réécrit :

$$Y = A x^{\alpha} L_1^{1-\alpha} \tag{5}$$

Partie C : la recherche et développement

La recherche et développement permet d'accroître le nombre A de biens intermédiaires produits par les firmes. On suppose que la R&D permet d'accroître le nombre de ces biens à taux constant :

$$\dot{A} = \theta A . L_2$$

où L_2 désigne le nombre de chercheurs employés dans le secteur de la R&D. On note L le nombre total de travailleurs dans l'économie ($L = L_1 + L_2$). On suppose que les connaissances accumulées dans l'économie (A) constituent un bien public, mais que chaque nouveau bien intermédiaire i est protégé par un brevet. La valeur actualisée V_a de chaque brevet est égale au flux de profits futurs réalisés par la firme qui produira ce nouveau bien intermédiaire i, soit :

$$V_a = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \pi = \frac{\pi}{r} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \frac{cx}{r} \tag{6}$$

1. Montrer que la productivité marginale du travail des chercheurs est égale à $\theta A V_a$.
2. L'équilibre sur le marché du travail impose que la productivité marginale des travailleurs du secteur produisant le bien final est égale à la productivité marginale des chercheurs. Montrer que cela implique que :

$$V_a = \frac{1-\alpha}{\theta} L_1^{-\alpha} x^{\alpha}$$

3. En déduire qu'à l'équilibre, le nombre d'individus employés dans le secteur de la production de bien final est :

$$L_1 = \frac{r}{\alpha\theta}$$

Partie C : la croissance de long terme

On souhaite déterminer le sentier de croissance équilibrée de cette économie. On pose $g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y}$, le taux de croissance du PIB.

1. On suppose que ni la population totale L, ni le taux d'intérêt r ne varient dans le temps. En partant de l'équation (5), montrer que l'économie croît au taux :

$$g_Y = \frac{\alpha\theta L - r}{\alpha}$$

Commenter.

2. Quels différences cette économie présente-t-elle avec une économie de type Solow ? En quoi la croissance ainsi modélisée peut-elle être qualifiée de « schumpéterienne » ? Quelle type d'explication ce modèle est-il susceptible de fournir à l'absence de convergence entre les pays du Nord et les pays du Sud ?