TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

TD 2 : Le choix du producteur

Séance du 8 novembre 2007

Objectifs du TD :

1. S'exercer à la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes à l'aide de la méthode du Lagrangien et des conditions de Kuhn et Tucker (cf. annexe sur l'optimisation).
2. Se familiariser avec les notions suivantes : demande conditionnelle de facteurs, fonction de coût, lemme de Shepard (exercice 1) ; demande inconditionnelle de facteurs, fonction d'offre, fonction de profit, lemme d'Hotelling (exercice 2) ; dualité (exercice 3).

Exercice préliminaire

Dans les exercices 1 et 2, on considérera toujours la fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs (capital K et travail L) suivante :

$$y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Montrer que :

1. La fonction Cobb-Douglas est quasi-concave.
2. La fonction Cobb-Douglas est concave $\Leftrightarrow$ $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta \leqslant 1$
3. Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < 1$, alors elle est strictement concave.

Exercice 1 : Comment produire ? La minimisation du coût

Dans un premier temps, on suppose que le producteur ne choisit pas le niveau d'output qu'il produit. Son objectif consiste simplement à choisir les quantités d'inputs K et L lui permettant de minimiser son coût de production à niveau d'output donné (noté $\overline{Y}$). On note w le prix du facteur travail (salaire) et r le prix du facteur capital (taux d'intérêt). L'entreprise étant *price taker* sur le marché des facteurs de production, le producteur considère les prix w et r comme donnés.

1. Comment s'écrit le coût de production C en fonction de K, L, w et r ?
2. Écrire le programme de minimisation du coût sous la forme d'un programme d'optimisation d'une fonction objectif à deux variables sous une contrainte prenant la forme d'une inéquation et des contraintes de non-négativité.

3. Résoudre ce programme en utilisant la méthode du Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker (*cf.* annexe 1 sur l'optimisation). Les conditions du second ordre sont-elles vérifiées lorsque $\alpha + \beta > 1$? En déduire les demandes conditionnelles[1] de facteurs $K(w, r, \overline{Y})$ et $L(w, r, \overline{Y})$.
4. Dans le plan (K, L) et à l'aide d'une isoquante et de lignes d'isocoût, représenter graphiquement la manière dont s'opère le choix du producteur.
5. Utiliser les demandes inconditionnelles de facteurs pour calculer la fonction de coût $C(w, r, \overline{Y})$ associée au niveau de production $\overline{Y}$. Quelles sont les propriétés de cette fonction ? Représenter graphiquement le coût de production en fonction du niveau d'output $\overline{Y}$ dans chacun des 3 cas suivants : $\alpha + \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \beta > 1$. Représenter également les fonctions de coût moyen $\frac{C(\overline{Y})}{\overline{Y}}$ et de coût marginal $\frac{\partial C(\overline{Y})}{\partial \overline{Y}}$. A quoi ressembleraient les courbes de coût marginal et de coût moyen d'une firme ayant des rendements d'échelle successivement croissants puis décroissants avec le niveau d'output ?
6. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$L(w, r, \overline{Y}) = \frac{\partial C(w, r, \overline{Y})}{\partial w} \quad (1)$$

$$K(w, r, \overline{Y}) = \frac{\partial C(w, r, \overline{Y})}{\partial r} \quad (2)$$

   Cette propriété de la fonction de coût porte le nom de lemme de Shepard et sera utilisée dans l'exercice 3. Dans le cas général, ce lemme se démontre à l'aide du théorème de l'enveloppe (*cf.* cours de maths).

Exercice 2 : Combien produire ? La maximisation du profit

Dans l'exercice précédent, la quantité d'output à produire était considérée comme exogène. A présent, on va au contraire supposer que le producteur est libre de choisir la quantité qu'il désire produire, mais que le marché lui impose le prix p auquel il devra vendre sa production. L'entreprise est donc *price taker* sur le marché de l'output.

Partie A : Maximisation du profit à prix donné des outputs

1. Comment s'écrit le profit Π réalisé par le producteur en fonction de Y, p, w et r ?
2. Écrire le programme de maximisation du profit sous la forme d'un programme d'optimisation d'une fonction objectif à 3 variables sous une contrainte prenant la forme d'une inéquation et des contraintes de non-négativité.
3. On suppose que la contrainte est saturée à l'optimum et que ce programme n'admet pas de solution « en coin ». Réécrire le programme de maximisation du profit comme un programme d'optimisation sans contraintes.
4. Résoudre ce programme. A quelle condition portant sur la valeur des paramètres α et β les conditions du second ordre sont-elles vérifiées ? Quelle est l'intuition sous-jacente ? Pour répondre à cette question, on s'intéressera au cas où fonction de production ne dépend que du facteur travail ($F(L) = L^\alpha$), avec $\alpha > 1$.
5. Que se passe-t-il lorsque les rendements d'échelle sont constants ? Interpréter dans le cas où $Y = F(L) = L$.

[1] Ces demandes de facteurs sont conditionnelles à la quantité d'output $\overline{Y}$ fixée.

6. On supposera dorénavant que $\alpha + \beta < 1$. En déduire les demandes inconditionnelles[2] de facteurs $L(p, w, r)$ et $K(p, w, r)$ (N.B. : le résultat n'est pas élégant du tout !).
7. Utiliser les demandes inconditionnelles de facteurs pour calculer la fonction d'offre $Y(p, w, r)$ du producteur.
8. Quelle est la fonction de profit du producteur $\Pi(p, w, r)$?
9. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} Y(p,w,r) &= \frac{\partial \Pi(p,w,r)}{\partial p} && (3) \\ L(p,w,r) &= -\frac{\partial \Pi(p,w,r)}{\partial w} && (4) \\ K(p,w,r) &= -\frac{\partial \Pi(p,w,r)}{\partial r} && (5) \\ & && (6) \end{aligned}$$

   Cette propriété de la fonction de profit porte le nom de lemme de Hotelling. Comme pour le lemme de Shepard, elle se démontre à l'aide du théorème de l'enveloppe (*cf.* cours de maths).

Partie B : Caractérisation par le coût marginal

Il existe une grande analogie entre recherche de profit maximum et recherche de coût minimum. Il est possible de relier les deux concepts en résolvant le programme de maximisation du profit étudié ci-dessus en deux étapes successives, c'est-à-dire en maximisant dans un premier temps le profit, à output $\overline{Y}$ donné par rapport à la combinaison d'inputs, puis en maximisant la fonction résultante par rapport à Y.

1. Montrer que le programme résolu dans la partie A (sous sa forme initiale : optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations) est équivalent au programme suivant :
$$\max_{Y} pY - C(w, r, Y)$$
2. Résoudre ce programme. Comment s'interprètent les conditions du premier ordre et les conditions du second ordre permettant de déterminer la quantité optimale d'output ? En donner une représentation graphique.
3. Analyser graphiquement ce qui se passerait si les rendements d'échelle étaient constants ou croissants.
4. A quoi ressemblerait la fonction d'offre d'une firme ayant des rendements successivement croissants puis décroissants avec le niveau d'output ?

Exercice 3 : technologie et coûts. L'approche duale

Il existe une relation duale entre la fonction de coût $C(w, r, Y)$ étudiée dans l'exercice 1 et la fonction de production $F(K, L)$. L'exercice suivant a pour objectif de montrer que ces fonctions contiennent très exactement la même information et se déduisent l'une de l'autre par une simple opération d'inversion.

[2] *i.e.* lorsque le niveau d'output est non pas fixé à l'avance, mais choisi de façon optimale en fonction de l'ensemble des prix p, w et r.

Pour illustrer la dualité entre fonctions de coût et de production, on part d'une fonction de coût de type CES donnée par :

$$C(w, r, Y) = Y^{\alpha}[w^{\beta} + r^{\beta}]^{\frac{1}{\beta}}$$

1. En utilisant le lemme de Shepard présenté dans l'exercice 1, calculer les expression des demandes conditionnelles de facteurs $L(w, r, Y)$ et $K(w, r, Y)$ exprimées en fonction du rapport $\frac{r}{w}$.
2. A partir des demandes conditionnelles de facteurs, retrouver la fonction de production CES associée à la fonction de coût $C(w, r, Y)$.
3. Quelle vous paraît être l'intérêt empirique de l'approche duale ?