TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

TD 4 : Le choix du consommateur

Séance du 22 novembre 2007

Objectifs du TD :

1. Maîtriser les différentes étapes de résolution du programme d'optimisation du consommateur : taux marginal de substitution, maximisation de l'utilité, demande marshallienne, fonction d'utilité indirecte (exercice 1, partie A) ; minimisation de la dépense, demande hicksienne, fonction de dépense (exercice 1, partie B) ; dualité, lemme de Shepard, identité de Roy (exercice 2).
2. Se familiariser avec les principales propriétés des fonctions de demande : courbes d'Engel, bien inférieur/normal, nécessaire/de luxe, élasticité-revenu de la demande (exercice 3, partie A) ; effet de substitution, effet de revenu, relation de Slutsky, bien Giffen, elasticité-prix de la demande (exercice 3, partie B) ; biens complémentaires, substituables, élasticité-croisée de la demande (exercice 3, partie C).

Préambule

On admettra le résultat suivant : soit F une fonction strictement croissante. Si la fonction U représente les préférences du consommateur, alors $F(U)$ les représente aussi.

Exercice 1 : Le choix du consommateur

Une des formes de fonction d'utilité les plus utilisées dans la pratique est, comme dans le cas du producteur, la fonction Cobb-Douglas. Dans cet exercice, on considère le cas à deux biens :

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

où $a > 0, b > 0$

Partie A : la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire

1. Montrer que les préférences de ce consommateur peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U' = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$$

où $\alpha + \beta = 1$ Représenter la courbe d'indifférence correspondant aux valeurs suivantes des paramètres : $U' = 10, \alpha = \beta = 0.5$.

2. le *taux marginal de substitution* du bien j au bien i est défini comme la variation de bien j nécessaire pour compenser une petite variation de bien i de telle sorte que l'utilité du consommateur reste constante :

$$\text{TMS}_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}\Big|_{dU=0} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

   Calculer le TMS du bien 2 au bien 1 associé à la fonction d'utilité étudiée ici.

3. Soit m le revenu du consommateur et p_1, p_2 les prix des biens x_1 et x_2. Écrire la contrainte budgétaire du consommateur.
4. Écrire et résoudre le programme du consommateur qui désire maximiser son utilité sous contrainte budgétaire en utilisant la méthode du Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker. Montrer que ce programme n'admet pas de solutions « en coin » ($x_1^* = 0$ ou $x_2^* = 0$). En déduire les fonctions de *demande marshallienne* $x_1(p_1, p_2, m)$ et $x_2(p_1, p_2, m)$ des biens 1 et 2. Dans le plan (x_1, x_2) Représenter graphiquement le choix du consommateur à l'aide d'une courbe d'indifférence et de droites de budget.
5. Utiliser les fonctions de demande marshallienne pour calculer la *fonction d'utilité indirecte* $v(p_1, p_2, m)$.

Partie B : la minimisation de la dépense

1. Ecrire la dépense D du consommateur en fonction de p_1, p_2, x_1 et x_2.
2. Ecrire et résoudre le programme du consommateur qui désire minimiser sa dépense de manière à ce que son utilité soit supérieure ou égale à un niveau donné $\overline{u}$ en utilisant la méthode du Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker. En déduire les fonctions de *demande hiscksiennes* (également appelées fonctions de demande compensée) $h_1(p_1, p_2, \overline{u})$ et $h_2(p_1, p_2, \overline{u})$ des biens 1 et 2. Représenter graphiquement le choix du consommateur.
3. Utiliser les fonctions de demande hicksienne pour calculer la *fonction de dépense* $e(p_1, p_2, \overline{u})$. On se souviendra que $\alpha + \beta = 1$. On montre aisément que cette fonction est concave en (p_1, p_2).

Partie C : la signification du multiplicateur de Lagrange

On s'intéresse à la signification du multiplicateur de Lagrange dans le cas général d'une fonction d'utilité U à n biens $x_1, x_2, ...x_n$ dont les prix sont notés $p_1, p_2, ...p_n$. On note $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ un panier de biens et $\widetilde{p} = (p_1, p_2, ...p_n)$ le vecteur de prix correspondant.

1. On s'intéresse au programme d'un consommateur qui souhaite maximiser son utilité sous contrainte budgétaire. Le revenu de ce consommateur est noté m. Écrire et résoudre ce programme à l'aide de la méthode du Lagrangien. Calculer les conditions du premier ordre permettant de dériver les fonctions de demande marshallienne $x_i(\widetilde{p}, m)$ de bien i.
2. On note $v(\widetilde{p}, m)$ la fonction d'utilité indirecte. Les deux égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} v(\widetilde{p}, m) &= U\left(x_1(\widetilde{p}, m), x_2(\widetilde{p}, m), ..., x_n(\widetilde{p}, m)\right) \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(\widetilde{p}, m) &= m \end{aligned}$$

En dérivant ces deux égalités par rapport au revenu m et en utilisant les conditions du premier ordre du programme de maximisation du consommateur, montrer que :

$$\frac{\partial v(\widetilde{p}, m)}{\partial m} = \lambda$$

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange.

3. Comment s'interprète le multiplicateur de Lagrange λ ?

Exercice 2 : La dualité

Dans cet exercice, on considère une fonction d'utilité U qui décrit les préférences d'un consommateur sur un panier de n biens $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dont les prix sont donnés par le vecteur $\widetilde{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Le revenu du consommateur est noté m.

Il est important de bien comprendre le lien entre fonction de demande marshallienne et fonction de demande hicksienne : ces deux fonctions correspondent à la résolution de deux programmes différents et n'ont pas les mêmes arguments (l'une caractérise le panier optimal à prix et *revenu* donnés, l'autre à prix et *utilité* donnés). Cependant, les valeurs prises par ces deux fonctions coïncident pour des niveaux « biens choisis » d'utilité et de revenu. Plus précisément, si $\overline{u}$ et m sont tels que $v(\widetilde{p}, m) = \overline{u}$ (ou, de manière équivalente, $e(\widetilde{p}, \overline{u}) = m$), alors :

$$x_k(\widetilde{p}, m) = h_k(\widetilde{p}, \overline{u}) \qquad i = 1, 2$$

1. Soit $h_k(\widetilde{p}, \overline{u})$ la demande hicksienne de bien k du consommateur et $e(\widetilde{p}, \overline{u})$ sa fonction de dépense. Montrer que :

$$h_k(\widetilde{p}, \overline{u}) = \frac{\partial e(\widetilde{p}, \overline{u})}{\partial p_k} \qquad \forall k = 1, ..., n$$

Indice : partir de la définition de la fonction de dépense et utiliser les conditions du premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda \frac{\partial U(\widetilde{h}(\widetilde{p}, \overline{u}))}{\partial x_i} \quad \forall i \\ \overline{u} &= U\big(\widetilde{h}(\widetilde{p}, \overline{u})\big) \end{aligned}$$

où $\widetilde{h} = \big(h_1(\widetilde{p}, \overline{u}), h_2(\widetilde{p}, \overline{u}), ..., h_n(\widetilde{p}, \overline{u})\big)$ désigne le vecteur des demandes hicksiennes de biens. Cette propriété porte le nom de *lemme de Shepard*[1] et constitue une application du théorème de l'enveloppe. Montrer que les résultats de l'exercice 1 vérifient bien cette propriété.

2. Soit $x_i(\widetilde{p}, m)$ la demande marshallienne de bien i du consommateur et $v(\widetilde{p}, m)$ son utilité indirecte. En partant de l'égalité $v\left(\widetilde{p}, e(\widetilde{p}, \overline{u})\right) = \overline{u}$, et en utilisant le lemme de Shepard, montrer que :

$$x_i(\widetilde{p}, m) = -\frac{\frac{\partial v(\widetilde{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\widetilde{p}, m)}{\partial m}} \qquad \forall i = 1, ..., n$$

où $m = e(\widetilde{p}, \overline{u})$. Cette propriété porte le nom d'*identité de Roy*. Montrer que les résultats de l'exercice 1 vérifient bien cette propriété. Quelle vous paraît-être l'intérêt empirique d'une telle propriété ?

[1] Ce lemme est également utilisé dans la théorie du producteur (cf. TD 2).

Exercice 3 : Propriétés des fonctions de demande

Effet d'une variation de revenu : courbes d'Engel

1. Les *Courbes d'Engel* décrivent la variation de la demande marshallienne en fonction du revenu m, à prix constants. Dans le plan (x_1, x_2) et en vous aidant de courbes d'indifférences et de droites de budget, donner une interprétation graphique de cette notion.
2. Au point $(\widetilde{p}, m)$, un bien i est dit :
   (a) *inférieur* si $\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial m} < 0$;
   (b) *normal* si $\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial m} > 0$;
   (c) *nécessaire* est un bien normal tel que le quotient $\frac{p_i x_i(\widetilde{p},m)}{m}$ (part de la dépense en bien i dans la dépense totale) est décroissant en m ;
   (d) *de luxe* si le quotient $\frac{p_i x_i(\widetilde{p},m)}{m}$ (part de la dépense en bien i dans la dépense totale) est croissant en m.

   Montrer que les biens luxe sont nécessairement des biens normaux. Dans le plan (m, x), représenter graphiquement la courbe d'Engel d'un bien que l'on commence à consommer lorsque le revenu m dépasse le seuil m_0 et qui est successivement de luxe, nécessaire puis inférieur à mesure que m augmente.
3. L'*élasticité-revenu* de la demande de bien i, au point $(\widetilde{p}, m)$ s'écrit $\epsilon_{i,m} = \frac{\partial \ln x_i(\widetilde{p},m)}{\partial \ln m}$. Calculer cette élasticité dans le cas de la fonction d'utilité Cobb-Douglas étudiée dans l'exercice 1.

Effet d'une variation de prix du bien

1. On s'intéresse d'abord à l'effet d'une variation du prix du bien i sur la demande hicksienne de ce bien. En utilisant le lemme de Shepard et la concavité de la fonction de dépense, montrer qu'on a nécessairement $\frac{\partial h_i(\widetilde{p},m)}{\partial p_i} < 0$. Dans le plan (x_1, x_2), représenter graphiquement l'effet d'une hausse du prix du bien 1 sur la demande hicksienne (ou compensée) de bien 1.
2. On s'intéresse maintenant à l'effet d'une variation du prix du bien i sur la demande marshallienne de ce bien. En partant de l'égalité $x_i\left(\widetilde{p}, e(\widetilde{p}, \overline{u})\right) = h_i(\widetilde{p}, \overline{u})$ et en utilisant le lemme de Shepard, montrer que :

$$\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i(\widetilde{p},\overline{u})}{\partial p_i}}_{\text{Effet de substitution (<0)}} - \underbrace{x_i(\widetilde{p},m)\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial m}}_{\text{Effet de revenu}}$$

   où $m = e(\widetilde{p}, \overline{u})$. Cette équation porte le nom de *relation de Slutsky*. Dans le plan (x_1, x_2), représenter graphiquement l'effet d'une hausse du prix du bien 1 sur la demande marshallienne de bien 1 en distinguant selon que le bien i est un bien normal ou inférieur.
3. Un bien est dit *Giffen* lorsque $\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial p_i} > 0$. A quelle condition un tel bien existe-t-il ?
4. L'*élasticité-prix* de la demande de bien i, au point $(\widetilde{p}, m)$ s'écrit $\epsilon_i = \frac{\partial \ln x_i(\widetilde{p},m)}{\partial \ln p_i}$. Calculer cette élasticité dans le cas de la fonction d'utilité Cobb-Douglas étudiée dans l'exercice 1.

Effet d'une variation de prix des autres biens

1. En s'inspirant de la partie précédente, montrer que la variation de la demande marshallienne de bien i résultant d'une variation du prix du bien j vérifie la relation de Slutsky :
$$\frac{\partial x_i(\widetilde{p}, \overline{m})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\widetilde{p}, \overline{u})}{\partial p_j} - x_j(\widetilde{p}, \overline{m}) \frac{\partial x_i(\widetilde{p}, \overline{m})}{\partial m}$$
où $\overline{m} = e(\widetilde{p}, \overline{u})$.

2. Deux biens i et j sont dits :
   (a) *substituts nets* (resp. *compléments nets*) $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial h_i(\widetilde{p},\overline{u})}{\partial p_j} > 0$ (resp. < 0) et $\frac{\partial h_j(\widetilde{p},\overline{u})}{\partial p_i} > 0$ (resp. < 0) ;
   (b) *substituts bruts* (resp. *compléments bruts*) $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial x_i(\widetilde{p},m)}{\partial p_j} > 0$ (resp. < 0) et $\frac{\partial x_j(\widetilde{p},m)}{\partial p_i} > 0$ (resp. < 0).

   Le café, le thé et le sucre sont-ils deux à deux compléments nets ou substituts nets ? Dans le plan (x_1, x_2), construire un exemple de biens tels que $\frac{\partial x_2(\widetilde{p},m)}{\partial p_1} > 0$ (x_2 substitut brut de x_1), mais $\frac{\partial x_1(\widetilde{p},m)}{\partial p_2} < 0$ (x_1 complément brut de x_2).

3. L'*élasticité-prix* croisée de la demande de bien i par rapport au prix du bien j, au point $(\widetilde{p}, m)$ s'écrit $\epsilon_{ij} = \frac{\partial \ln x_i(\widetilde{p},m)}{\partial \ln p_j}$. Calculer cette élasticité dans le cas de la fonction d'utilité Cobb-Douglas étudiée dans l'exercice 1.