TD d'Économie – Julien Grenet
École Normale Supérieure
Année 2007-2008

TD 6 : L'analyse du bien-être

Séance du 6 février 2007

Les outils de la microéconomie du consommateur peuvent être utilisés pour évaluer l'impact d'un certain nombre de politiques publiques sur le bien-être des individus : transferts en nature *versus* transferts monétaires, taxation optimale, etc.

Les variations de bien-être engendrées par ces politiques peuvent être mesurées de différentes manières : les notions de *variation équivalente*, *variation compensatrice* et *surplus* sont présentées dans l'exercice 2.

Préambule

Matrice de Slutsky

Soit $h_i(\widetilde{p}, u)$ la demande hicksienne (ou demande compensée) de bien i étant donné le vecteur de prix des biens $\widetilde{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ et un niveau d'utilité u. On appelle matrice de Slutsky (ou matrice des effets de substitution) la matrice des dérivées partielles des demandes compensées de bien $1, 2, ..., n$ par rapport aux prix $p_1, p_2, ..., p_n$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} & \frac{\partial h_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial p_1} & \frac{\partial h_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

La convexité des préférences implique que cette matrice est symétrique ($\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$) *semi-définie négative* (voir définition ci-après).

Matrice semi-définie négative

Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$ et de terme général $(a_{ij})_{i,j=1,..,n}$. Cette matrice est dite semi-définie négative si et seulement si, pour tout vecteur-colonne $\widetilde{x}$ de dimension $1 \times n$, on a :

$$\widetilde{x}' A \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} \leqslant 0$$

où $\widetilde{x}'$ (vecteur-ligne) désigne la transposée de dimension $n \times 1$ du vecteur $\widetilde{x}$.

Relation d'Euler

Soit f une fonction à n variables homogène de degré k (ce qui signifie que $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n)$). Alors cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(\widetilde{x})}{\partial x_i} = k f(\widetilde{x})$$

Exercice 1 : le Père Noël est-il une ordure ?

Le principe économique de la « carte blanche » énonce qu'un transfert monétaire sera toujours préféré par un consommateur à un transfert en nature équivalent. Dans l'exercice qui suit, on cherche à vérifier ce résultat en examinant le cas des cadeaux de Noël.

On suppose que l'utilité U de Thérèse dépend de la consommation de deux biens : le chocolat, noté x_c, et un bien composite noté x_r. Son revenu est noté m, le prix du chocolat p_c et le prix du bien composite p_r.

1. Écrire et résoudre le programme de maximisation de l'utilité de Thérèse sous la contrainte budgétaire (qu'on notera B). Dans le plan (x_c, x_r), représenter graphiquement la solution de ce programme. On note x_c^*, x_r^* le panier ainsi choisi.
2. A Noël, Thérèse se fait offrir par le Père Noël du chocolat en quantité $\overline{x}_c$. N'ayant pas anticipé qu'elle recevrait ce cadeau, elle n'est pas en mesure de modifier le panier de bien choisi antérieurement. Quelle quantité de chocolat x_c' et de bien composite x_r' consomme-t-elle après avoir reçu son cadeau ? Représenter graphiquement la courbe d'indifférence sur laquelle se situe ce panier.
3. L'année suivante, Thérèse anticipe qu'elle va recevoir la même quantité de chocolat $\overline{x}_c$ que l'année précédente. Elle détermine donc le panier optimal (x_c'', x_r'') qu'elle veut consommer, chocolats de Noël inclus. Montrer que sa contrainte budgétaire s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} p_c x_c'' + p_r x_r'' & \leqslant & m + p_c \overline{x}_c & \quad (B') \\ x_c'' & \geqslant & \overline{x}_c & \end{array} \right.$$

   Représenter graphiquement cette contrainte budgétaire (bien indiquer sur le graphique les abscisses et ordonnées des points où les droites de budget coupent les axes). On remarquera que cette contrainte est coudée et que l'ordonnée du point de la droite (B') qui a pour abscisse $\overline{x}_c$ est égale à l'ordonnée à l'origine de la droite de budget (B) de la question 1.
4. Déterminer le panier (x_c'', x_r'') choisi par Thérèse, en distinguant selon les cas. Ce panier lui procure-t-il une utilité plus grande que le panier (x_c', x_c') ?
5. L'année suivante, plutôt que de lui offrir une boîte de chocolat, le Père Noël décide d'offrir à Thérèse un chèque dont le montant est égal à la valeur d'achat de la boîte de chocolat offerte l'année précédente. Réécrire la contrainte budgétaire de Thérèse. Quel panier de bien (x_c''', x_c''') choisit-elle ? Comparer l'utilité associée à ce panier à celle des paniers (x_c', x_c') et (x_c'', x_c''). Quelle conclusion en tirez-vous ?
6. Quelles critiques adresseriez-vous à ce modèle très fruste ?

Exercice 2 : Variation compensatrice, variation équivalente et surplus

On s'intéresse au bien-être d'un consommateur dont la fonction d'utilité comporte n biens $(x_1, x_2, ...x_n)$ sont les prix sont notés $(p_1, p_2, ...p_n)$. On considère un projet dont la conséquence est de faire passer le vecteur prix de $\widetilde{p}$ à $\widetilde{p}'$ et le revenu de l'agent de m à m'. Il peut s'agir, par exemple, de la mise en place d'une taxe sur la consommation et sur le revenu. La mesure la plus simple de la variation de bien-être correspondante est évidemment la variation d'utilité indirecte de l'agent :

$$\Delta v = v(\widetilde{p}', m') - v(p, m)$$

la transformation n'étant avantageuse que si cette différence est positive. Malheureusement, un tel critère ne permet pas d'estimer numériquement le gain ou la perte de bien-être, la fonction v n'étant définie, à préférences données, qu'à une transformation croissante près, de sorte que deux utilités indirectes correspondant aux mêmes préférences donneront en général deux valeurs différentes pour Δv. La solution de ce problème consiste à utiliser des variations mesurées en unités monétaires.

1. En se limitant au cas où le choix se limite à deux biens, représenter dans le même plan (x_1, x_2) le choix du consommateur qui maximise sont utilité dans le cas (p_1, p_2, m) et dans le cas (p_1', p_2', m').
2. La première mesure de la variation de bien-être, appelée *variation équivalente*, s'écrit :

   $$VE = e\left(\widetilde{p}, v(\widetilde{p}', m')\right) - m$$

   où e désigne la fonction de dépense du consommateur. Que mesure cette variation ? Comment se représente-t-elle graphiquement dans le cas à deux biens ?
3. Une seconde mesure de la variation de bien-être, appelée *variation compensatrice*, s'écrit :

   $$VC = m' - e\left(\widetilde{p}', v(\widetilde{p}, m)\right)$$

   Que mesure cette variation ? Comment se représente-t-elle graphiquement dans le cas à deux biens ?
4. Si l'on souhaite prendre en compte le coût d'une éventuelle indemnisation des agents lésés, quelle variation utilisera-t-on en pratique ? Si l'on souhaite simplement estimer les bénéfices d'un projet, sans idée d'indemnisation, quelle variation est-il préférable d'utiliser ? Pourquoi ?
5. On suppose que seul le prix du bien 1 est susceptible de varier (on suppose qu'il augmente : $p_1' > p_1$), les prix des autres biens et le revenu demeurant constants. Le revenu ne varie pas non plus : $m' = m$.
   En remarquant que : $m = m' = e\left(\widetilde{p}, v(\widetilde{p}, m)\right) = e\left(\widetilde{p}', v(\widetilde{p}', m)\right)$ montrer que :

   $$\begin{aligned} VE &= -\int_{p_1}^{p_1'} h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u') d\overline{p}_1 \\ VC &= -\int_{p_1}^{p_1'} h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u) d\overline{p}_1 \end{aligned}$$

   où h_1 désigne la demande hicksienne de bien 1, $u = v(p_1, p_2, .., p_n, m)$ et $u' = v(p_1', p_2, .., p_n, m)$.

6. L'inconvénient de ces deux mesures monétaires de la variation de bien-être est que la fonction de demande hicksienne n'est pas observable empiriquement, contrairement à la fonction de demande marshallienne. C'est pourquoi on utilise une estimation approximative de la variation de bien-être appelée *variation de surplus*. Dans le cas où seul le prix du bien 1 varie (par exemple, augmente), cette variation s'écrit :

$$VS = -\int_{p_1}^{p'_1} x_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, m) d\overline{p}_1$$

7. Dans le plan $(\overline{p}_1, x_1)$, représenter graphiquement les fonctions $x_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, m)$, $h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u)$ et $h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u')$. Utiliser l'équation de Slutsky pour montrer que les fonctions de demande hicksienne sont moins pentues en valeur absolue que la fonction de demande marshallienne (on suppose que le bien 1 est normal). En quelle abscisse les fonctions $x_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, m)$ et $h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u)$ – respectivement $x_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, m)$ et $h_1(\overline{p}_1, p_2, .., p_n, u')$ – se coupent-elles ? Déduire de cette représentation que :

$$VC \leqslant VS \leqslant VE$$

8. Que devient cette relation pour un bien inférieur ?
9. Application : l'utilité de Robert dépend de deux biens, la bière (x_b) et les cigarettes (x_c). Elle s'écrit :

$$U(x_b, x_c) = \ln x_b + \ln x_c$$

   (a) On note p_b le prix de la bière et p_c le prix des cigarettes. Le revenu de Robert est noté m. Quelle sont les demandes marshallienne et hicksienne de bière et de cigarettes de Robert ?

   (b) Le budget alloué par Robert à sa consommation de bière et de cigarettes est de 40 euros par semaine. Le prix d'une bière est de 2 euros, le prix d'un paquet de cigarettes de 4 euros. Combien Robert consomme-t-il de bières et de paquets de cigarettes par semaine ?

   (c) On suppose que le prix des cigarettes passe de 4 à 5 euros. Quelle quantité de bières et de cigarettes Robert consomme-t-il désormais ? Calculer la perte de bien-être (en euros) qu'il subit en utilisant chacune des trois méthodes présentées dans cet exercice (variation compensatrice, variation équivalente, surplus).

Exercice 3 : Taxation optimale

Dans cet exercice, on applique les outils de la microéconomie du consommateur pour évaluer l'efficacité économique de divers modes de taxation.

First Best : taxes sur les ventes *versus* impôt sur le revenu

Pour prélever des recettes fiscales, un gouvernement a le choix entre deux types d'instruments : une taxe différenciée sur les ventes (différents taux de TVA par exemple) ou un impôt sur le revenu. On souhaite déterminer lequel de ces deux instruments fiscaux est le plus efficace économiquement. On considère un consommateur dont l'utilité dépend de la consommation de deux biens x_1 et x_2 et dont le revenu est noté m.

1. représenter graphiquement le choix initial du consommateur (avant la mise en place d'une taxe) lorsque celui-ci maximise son utilité. On note (x_1^*, x_2^*) le panier optimal choisi par le consommateur et U^* l'utilité associée à ce panier.

2. On suppose que le gouvernement décide de taxer les biens 1 et 2 au même taux t. Écrire le programme (noté $\mathscr{P}$) du consommateur et écrire les conditions du premier ordre permettant de calculer le panier d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Montrer que le remplacement de ces taxes par un impôt sur le revenu égal à $t(p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2)$ permet d'aboutir au même résultat (on note $\mathscr{P}'$ le programme d'optimisation correspondant). Indice : on montrera que le panier $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ qui maximise l'utilité du consommateur dont le revenu est imposé vérifie les conditions du premier ordre du programme $\mathscr{P}'$.
3. On suppose maintenant que le gouvernement décide de taxer au taux t la consommation de bien x_1, sans taxer la consommation de bien 2. Écrire la contrainte budgétaire du consommateur. On note (x_1', x_2') le panier optimal choisi par le consommateur après l'instauration de cette taxe. Représenter graphiquement l'impact de la mise en place de cette taxe sur le choix du consommateur. Comparer l'utilité U' associée à ce panier à l'utilité U^* associée au panier (x_1^*, x_2^*). Quel est le produit de la taxe ?
4. Le gouvernement renonce à cette taxe et décide de collecter la même somme à travers un impôt sur le revenu. Comment s'écrit la contrainte budgétaire du consommateur ? Montrer que la droite de budget correspondante passe par le panier (x_1', x_2'). Quel est le panier (x_1'', x_2'') choisi par le consommateur en présence de cet impôt sur le revenu ? Comparer l'utilité U'' associée à ce panier à l'utilité U'. Comment expliquer cet écart ?

Second Best : taxation optimale des ventes et règle de Ramsey

Un impôt forfaitaire sur le revenu, bien que toujours préférable à une taxe différenciée sur les ventes de biens, n'est pas toujours réalisable. A quoi ressemble une taxe optimale lorsqu'on ne peut pas envisager de taxe forfaitaire ?

On étudie cette question dans le cadre d'une économie composée d'un seul consommateur représentatif doté d'un revenu m et dont l'utilité directe est noté $U(\widetilde{x})$. Si chaque bien k de prix hors taxe p_k est taxé au taux t_k, alors le vecteur de prix TTC auquel est confronté le consommateur est $\widetilde{\pi} = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n)$ où $\pi_k = (1 + t_k)p_k$ pour tout $k = 0, ..., , n$. La fonction d'utilité indirecte du consommateur représentatif est alors donnée par $v(\widetilde{\pi}, m)$ et la recette fiscale réalisée par le gouvernement est égale à :

$$R(t_0, t_2, ..., t_n) = \sum_{k=0}^{n} t_k p_k x_k(\widetilde{\pi}, m)$$

où $x_k(\widetilde{\pi}, m)$ désigne la demande marshallienne de bien k du consommmateur.

1. Le problème de la taxation optimale consiste à choisir le vecteur de taxe $(t_0, t_1, ..., t_n)$ qui maximise l'utilité indirecte du consommateur, sous la contrainte que le système fiscal rapporte à l'État une recette au moins égale à R_0. Écrire le Lagrangien de ce programme d'optimisation (on appelera μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire de l'État) et montrer que les $n + 1$ premières conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial v(\widetilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} = -\mu \left[x_i(\widetilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^{n} t_k p_k \frac{\partial x_k(\widetilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \right] \qquad \forall i = 0, ..., n$$

2. Utiliser l'identité de Roy pour montrer que l'équation précédente peut se réécrire :

$$x_i(\widetilde{\pi}, m) = \frac{\mu}{\lambda - \mu} \sum_{k=0}^{n} t_k p_k \frac{\partial x_k(\widetilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \qquad \forall i = 0, ..., n$$

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange associé au problème de maximisation de l'utilité du consommateur représentatif.

3. En utilisant la relation de Slutsky et la symétrie de la matrice de Slutsky (cf. préambule), montrer que l'équation précédente peut se réécrire (cette relation porte le nom de « règle de Ramsey ») :

$$-\theta.x_i(\widetilde{\pi}, m) = \sum_{k=0}^{n} t_k p_k \frac{\partial h_i(\widetilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \qquad \forall i = 0, ..., n \tag{1}$$

où $u = v(\widetilde{\pi}, m)$ et $\theta = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} - \sum_{k=0}^{n} t_k p_k \frac{\partial x_k(\widetilde{\pi}, m)}{\partial m} \right)$ ne dépend pas du bien i.

4. [Question difficile] En utilisant le fait que la matrice de Slutky est semi-définie négative (cf. préambule), montrer à partir de l'équation (1) que θ est du même signe que R_0, donc est positif ou nul.

5. On commence par supposer que *tous* les biens peuvent être taxés. Montrer que dans ce cas, il est optimal de taxer tous les biens au même taux t (situation dite de « first best » analysée dans la partie précédente dans le cas à deux biens).
<u>Indice</u> : On montrera que lorsque $t_i = t$ pour tout $i = 0, ..., n$, alors le membre de droite de l'équation (1) est nul, ce qui implique que les conditions du premier ordre sont vérifiées. Pour montrer ce résultat, on utilisera la relation d'Euler (cf. préambule) en remarquant que la fonction de demande hicksienne est homogène de degré 0 en prix.

6. On suppose dorénavant qu'au moins un bien (le loisir par exemple, noté x_0) ne peut être taxé ($t_0 = 0$). Dans ce cas, le résultat précédent ne tient plus et la taxation optimale ne consiste plus à taxer au même taux les biens 1 à n.
Dans cette situation dite de « second best », on aimerait récrire l'équation (1) sous une forme interprétable. Pour cela, on suppose que tous les biens sont initialement taxés de manière optimale à des taux très faibles (sauf le bien 0 pour lequel $t_0 = 0$). On aimerait savoir ce qui se passerait si on supprimait brutalement toutes les taxes, c.-à-d. si le prix de chaque bien passait de $p_k(1 + t_k)$ à p_k. En utilisant la formule de la différentielle totale, montrer que que l'impact de cette détaxation sur la demande hicksienne de bien i (notée dh_i) peut être approximée par la formule suivante :

$$dh_i \simeq -\sum_{k=1}^{n} p_k t_k \frac{\partial h_i(\widetilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \tag{2}$$

En utilisant (1) et (2) et en remarquant que $x_i(\widetilde{\pi}, m) = h_i(\widetilde{\pi}, u)$, montrer que la taxation optimale des biens est telle que :

$$\frac{dh_i(\widetilde{\pi}, u)}{h_i} \simeq \theta \quad \forall i = 1, ..., n$$

Interpréter.

7. Montrer que l'équation (1) peut se réécrire sous forme d'élasticité :

$$-\theta = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ik} \tau_k \quad \forall i = 1, ..., n$$

où ϵ_{ik} désigne l'élasticité de la demande hicksienne de bien i au prix TTC π_k du bien k et $\tau_k = \left(\frac{t_k}{1+t_k} \right)$. Ce taux de taxe τ_k est une transformation monotone croissante du taux de taxe t_k.

8. Dans le cas extrême où $\epsilon_{ik} = 0$ pour tout $k \neq i$ (la demande hicksienne de bien i ne dépend pas du prix TTC des autres biens), que devient cette relation ? Que nous dit-elle sur la manière optimale de fixer les taux de taxe τ_k ? En quoi cette règle dite « de l'élasticité inverse » est-elle conforme à l'intuition ? L'application pratique de cette règle ne risque-t-elle pas cependant de soulever des problèmes d'équité ?