

TD 9 : LE MODÈLE DE CROISSANCE NÉOCLASSIQUE (SOLOW)

Séance du 4 janvier 2007

Ce TD propose la résolution du modèle de Solow (article original : « A contribution to the Theory of Economic Growth », *Quarterly Journal of Economics*, 1956).

Les hypothèses du modèle

On considère une économie dont la technologie à la date t est représentée par une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs, le travail $L(t)$ et le capital $K(t)$:

$$Y = F(A(t), K(t), L(t)) = K(t)^\alpha [A(t)L(t)]^{1-\alpha} \quad (1)$$

où A est le niveau d'avancement technologique qui porte uniquement sur le facteur travail (neutralité « au sens de Harrod »). Le progrès technique, qu'on suppose exogène, croît au taux constant g_A . On suppose par ailleurs que la population croît au taux constant g_L .

Le capital se déprécie au taux δ . Le taux d'épargne, noté s , est constant et exogène.

On introduit les notions de capital par unité de travail efficace $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ et de revenu par unité de travail efficace $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$.

On notera g_x le taux de croissance de la variable x , où $x \in \{Y, A, K, L, y, k\}$.

Préambule : le progrès technique dans le modèle de Solow

Le progrès technique est supposé exogène dans le modèle de Solow. Plus fondamentalement, la connaissance A est considérée comme un bien non rival et « non excluable », ce qui a pour conséquence que sa production n'a pas besoin d'être rémunérée et que tous les pays ont le même état d'avancement technologique.

1. Montrer que la fonction de production (1) admet des rendements d'échelle constants.
2. Montrer que la fonction de production F vérifie la relation d'Euler :

$$Y = \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial L} L + \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial K} K$$

3. En déduire que la firme représentative ne pourrait pas survivre si elle devait rémunérer le facteur technologique A à sa productivité marginale. En quoi cette propriété pose-t-elle problème pour expliquer la croissance dans un cadre d'analyse néoclassique reposant sur l'hypothèse de concurrence parfaite ?

Partie A : la trajectoire d'équilibre

1. L'équation d'accumulation du capital s'écrit (on allège la notation en omettant les indices temporels) :

$$\dot{K} = I - \delta K$$

où I désigne l'investissement. Interpréter cette équation.

2. On suppose que l'investissement en t est égal à l'épargne totale en t , soit $I = s.Y$, où s désigne le taux d'épargne exogène. Montrer que le capital par unité de travail efficace $k(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante (on utilisera le fait que $y(t) = [k(t)]^\alpha$) :

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s}{k^{1-\alpha}} - (\delta + g_A + g_L) \quad (2)$$

3. En utilisant cette équation, montrer graphiquement dans le plan $(k, \frac{\dot{k}}{k})$ que $k(t)$ admet un équilibre stationnaire stable noté k^* , tel que :

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_L} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3)$$

Pourquoi la croissance du capital par unité de travail efficace s'épuise-t-elle dans cette économie ?

4. Calculer la valeur du revenu de long-terme par unité de travail efficace y^* . Quel est le taux de croissance du PIB par habitant $g(\frac{Y}{L})$ à long terme ?
5. Dédurre de y^* l'expression du log du PIB par tête $\ln \frac{Y(t)}{L(t)}$ en fonction de s, δ, g_L, g_A et A_0 .
6. En vous servant de l'expression du PIB par tête calculée à la question précédente, représenter graphiquement l'évolution du PIB par tête (pris en logarithme) en fonction du temps. Quel est l'impact d'un accroissement du taux d'épargne à partir d'une date t_0 sur cette évolution. Interpréter.

Partie B : la dynamique transitoire

1. Poser $z(t) = \frac{K(t)}{Y(t)}$ (capital par unité d'output). Montrer que z_t vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre stable (indice : on utilisera le fait que $z(t) = k(t)^{1-\alpha}$). Quelle est la vitesse de convergence de $z(t)$? Montrer en vous aidant du *vade mecum* sur les équations différentielles que la solution de cette équation s'écrit :

$$z(t) = \frac{s}{\delta + g_L + g_A} + \left(z(0) - \frac{s}{\delta + g_L + g_A} \right) e^{-\beta t}$$

où $\beta = (1 - \alpha)(1 + g_L + g_A)$.

2. Montrer qu'au voisinage de l'équilibre stationnaire k^* , on a :

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} \simeq -\beta \ln \left(\frac{k}{k^*} \right)$$

Indice : partir de l'équation (2) et de la définition de k^* donnée par l'équation (3) et utiliser la propriété suivante : $(x - 1) \simeq \ln x$ lorsque $x \rightarrow 1$.

3. On souhaite comparer la dynamique transitoire de deux pays qui ont les mêmes caractéristiques structurelles (même fonction de production, s , δ , g_A et g_L identiques), mais n'ayant pas le même stock de capital efficace par tête initial $k(0)$. On note $k(0)$ le stock de capital initial du pays « riche » et $\tilde{k}(0)$ ($< k(0)$) celui du pays pauvre. calculer l'écart de taux de croissance initial entre ces deux pays $g_{\tilde{k}(0)} - g_{k(0)}$ et discuter son signe. Comment évolue cet écart de taux de croissance ? Que se passe-t-il si les deux pays n'ont pas le même taux d'épargne ? Pourquoi parle-t-on de « convergence conditionnelle » ?
4. Application numérique : on suppose que deux pays ont les mêmes caractéristiques suivantes (les taux de croissance sont annuels) :

$$g_A = 0\%, \quad g_L = 1.5\%, \quad \delta = 5\%, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

En revanche, le capital par tête efficace du pays 2 est deux fois plus faible que celui du pays 1 : $k_2 = \frac{k_1}{2}$. Calculer la valeur approchée de l'écart initial de croissance initiale entre ces deux pays.

Partie C : la « règle d'or »

1. Calculer le niveau de consommation de long terme par unité de travail efficace c^* en fonction de s et y^* . Montrer que c^* est une fonction croissante, puis décroissante de s et que la valeur de s^* qui maximise c^* est :

$$s^* = \alpha \tag{4}$$

2. On rappelle qu'à chaque instant, le taux d'intérêt réel r est égal à la productivité marginale du capital par unité de travail efficace. Montrer alors que l'égalité (4) implique :

$$\boxed{r = \delta + g_A + g_L}$$

Cette formule porte le nom de « règle d'or ».