# Réflexions sur l'efficacité informationnelle et ses paradoxes

André Orléan et Yamina Tadjeddine

(29 janvier 1997)

S'il n'est pas d'activités économiques qui ne soient concernées, à un degré ou à un autre, par les questions touchant à la production et à la transmission de l'information, l'économie financière se distingue cependant des autres secteurs par la place centrale qu'elles y occupent : on peut dire que l'information y est tout à la fois la matière première et l'output final. Cela tient au fait que les marchés financiers sont des marchés d'anticipations. On y évalue des perspectives de profit. Il est significatif à cet égard que ce soit dans le chapitre de la *Théorie Générale* consacré à "L'état de la prévision à long terme" que Keynes aborde l'examen des marchés financiers : il leur assigne pour finalité de "triompher des forces secrètes du temps et de l'ignorance de l'avenir" ([8] p.169). En l'absence de bureau de planification, c'est à ces marchés qu'incombe le rôle de fournir au reste de l'économie les signaux permettant au capital de s'investir efficacement. Pour cette raison, ils constituent un rouage essentiel dans l'auto-régulation des économies capitalistes développées. Ce rôle central joué par l'information apparaît sans ambiguité dans la définition de l'efficience proposée par E. Fama et acceptée par tous les économistes : un marché financier est efficient si les cours qui s'y forment intègrent toute l'information disponible. Autrement dit ce sont les performances informationnelles de ces marchés qui sont prises en considération lorsqu'il s'agit d'en mesurer l'efficacité. C'est l'objet du présent article que de proposer une réflexion sur cette notion d'efficience informationnelle.

Pour ce faire, dans une première section, on partira des travaux de Grossman [1976] et Grossman et Stiglitz [1976]. Ces travaux ont profondément renouvelé notre compréhension de l'efficience informationnelle dans la mesure où ils ont proposé un cadre d'analyse qui prenne en compte pleinement la dimension informationnelle des prix, à savoir les prix comme révélateur des informations détenues par les agents privés. Leur résultat le plus spectaculaire est d'avoir montré l'impossibilité d'existence de marchés informationnellement efficaces, pour reprendre le titre de leur article de 1980 "On the Impossibility of Informationally Efficent Markets" [5]. La logique générale de ce résultat n'est pas difficile à comprendre. Si le prix révèle parfaitement toute l'information, par là même disparaît toute incitation à s'informer puisqu'il devient plus profitable d'observer gratuitement le prix que de rechercher une information coûteuse. Un prix qui révèlerait parfaitement l'information ne saurait donc constituer un équilibre dès lors que l'information est coûteuse. C'est le premier paradoxe mis en avant par Grossman en 1976 : "The paradox we must face is that $P$, by being efficient, removes incentives for individuals to collect information. If information is costly then no individual will purchase it if he can observe $P$. Therefore $P$ is not an equilibrium if information is costly. Only an imperfect information equilibrium can be an equilibrium in an economy where information is costly." ([3] p.584). Comme le soulignent nos deux auteurs, il apparaît alors que la gratuité de l'information est une condition nécessaire pour que les marchés soient efficients, mais "this is a *reductio ad absurdum*, since prices are important only when information is costly" ([4] p.248). Cela les conduit à s'opposer à certaines des analyses que développe F. Hayek dans son fameux article "The Use of Knowledge in Society" [6].

Il est une autre manière d'exprimer ce paradoxe, qu'on trouve dans l'article commun de 1976.[1] Lorsqu'on est dans la situation où le prix révèle parfaitement toute l'information, alors les fonctions de demande individuelle ne dépendent plus uniquement que du prix, sans qu'intervienne l'information personnelle. Mais, si tous les investisseurs n'utilisent plus leur information privée, comment cette information peut-elle être présente dans le prix et comment le prix peut-il agréger parfaitement l'information ? "If the market aggregated their information perfectly, individuals' demands would not be based on their own information, but then, would it be possible for markets to aggregate information perfectly?" ([4] p.250). Pour désigner l'un ou l'autre de ces deux énoncés, on parlera dorénavant du paradoxe de Grossman-Stiglitz. Ce sera l'objet de la première section que de présenter ces résultats. Nous conclurons cette section en montrant que la notion d'équilibre informationnellement efficace est une notion paradoxale dans la mesure où cet équilibre donne naissance à des comportements qui détruisent les conditions qui leur ont donné naissance. Autrement dit, les comportements qui tirent parti au mieux de l'efficience informationnelle ne sont pas compatibles

[1] Cette autre forme du paradoxe se trouve également dans la note 1, page 582, de l'article de Grossman [3]. Cette note renvoie à l'article commun [4] pour une présentation plus élaborée.

avec la reproduction de cet équilibre ! Pour cette démonstration on utilisera la présentation du paradoxe qui a été proposée par Orléan [10].

Dans une deuxième section, on s'intéressera aux équilibres informationnellement imparfaits. On s'interrogera sur les conséquences de cette imperfection quant au fonctionnement global des marchés. Pour mener à bien cette réflexion, on s'appuiera, d'une part sur la contribution importante de M. Hellwig [7], d'autre part sur l'article qu'ont écrit Grossman et Stiglitz en 1980 [5], et enfin sur les analyses qu'ont consacrées Gennotte et Leland [2] aux dangers que font courir au marché des prix informationnellement imparfaits. A la base de cette réflexion, on trouve le constat suivant. Dès lors qu'est pris en considération le rôle informationnel des prix, ceux-ci interviennent de deux manières fort distinctes dans la formation de la demande : au travers de la contrainte budgétaire et par le biais des anticipations. Dans un tel contexte, une diminution des prix donne lieu à des réactions qui peuvent différer de celles que décrivent les modèles qui ne prennent en compte les prix qu'au travers de la contrainte budgétaire. En effet, dans la mesure où cette diminution des prix est interprétée par les agents non informés comme résultant de ventes effectuées par les agents informés, ils seront amenés à y voir la conséquence d'informations nouvelles ayant révélé aux agents informés une baisse à venir des rendements. Cette interprétation va alors amener les agents non informés à copier les agents informés en révisant à la baisse leurs anticipations et, par voie de conséquence, leur demande. Si les prix révèlent parfaitement l'information, cette dynamique concourt puissamment à l'efficience du marché puisqu'elle permet aux non informés de prendre des positions en accord avec les variations des fondamentaux sur la seule base de l'observation des prix. Si les prix sont informationnellement imparfaits, il n'en est pas de même. C'est le cas lorsqu'est introduite une source supplémentaire d'incertitudes, comme l'action des "liquidity traders" qui perturbent l'offre de titres, pour reprendre l'analyse de Grossman et Stiglitz ou celle de Gennotte et Leland. Dans cette situation, les non informés ne sont plus capables de parfaitement distinguer dans les variations de prix entre ce qui provient d'une modification des anticipations des informés et ce qui tient aux chocs exogènes qui affectent l'offre. Il s'ensuit que des événements sans rapport avec une baisse des fondamentaux peuvent déclencher un mouvement de vente de la part des non informés sur la base d'une interprétation erronée. Si la part des non informés dans le marché est importante, un petit choc sur l'offre peut alors engendrer une chute non justifiée des prix de grande ampleur. C'est ce mécanisme qui, conjugué à l'action des "hedgers", est, pour Gennotte et Leland, responsable du krach de 1987.

Cette modélisation des marchés financiers est très proche de celles proposées par G. Akerlof [1] ou J. Stiglitz [13] pour analyser les marchés sur lesquels la qualité du produit échangé est incertaine. Dans une telle situation, la demande $D(p, q)$ dépend de deux variables : le prix $p$ et la qualité $q$ du produit considéré [9]. Si on a toujours $D'_p < 0$, on observe que $D'_q > 0$ ; i.e. la demande est une fonction croissante de la qualité. Par ailleurs Akerlof [1] ou Stiglitz [13] démontre que $q$ est une fonction croissante du prix. Les agents qui ne connaissent pas la qualité exacte du produit échangé, utilisent le prix comme un indicateur de cette qualité incertaine. Il en découle qu'une variation des prix joue sur la demande au travers de deux effets contradictoires, l'effet global dépendant de la force relative de ces deux effets. C'est cette même structure qu'on retrouve dans les modèles financiers de Grossman et Stiglitz ou Gennotte et Leland, la qualité d'un titre étant alors définie par l'espérance et la variance de son rendement. On sait que cette dualité des prix conduit à des échecs de marché, ce que confirment à nouveau l'analyse de Gennotte et Leland.

Comme on vient de le voir, l'introduction du rôle informationnel des prix conduit à une analyse qui justifie rationnellement les comportements mimétiques sur les marchés financiers : "Thus price, reflecting others' expectations, rationally conditions each individual investor's expectations, and bandwagon or herd effects can result" ([2] note 6, p.1001). Dans une troisième et dernière section, on étudiera plus spécifiquement le lien existant entre influences informationnelles et imitation. Pour ce faire, on s'appuiera sur les travaux d'A. Orléan [12]. L'intérêt de cette approche par rapport à celles analysées dans les sections précédentes est de proposer un cadre dynamique, alors qu'on ne raisonnait jusqu'à maintenant qu'en termes d'équilibre. Le résultat central de cette nouvelle approche est de démontrer que l'imitation est ambivalente : il est rationnel d'être imitateur pour autant que le nombre d'imitateurs au sein du marché est faible ; cependant, dès lors que le groupe est essentiellement composé d'imitateurs, l'imitation devient contre-productive et peut conduire à des phénomènes de bulles. C'est là une idée intuitive qui trouve alors une justification précise. Cette analyse des influences informationnelles nous conduira, dans cette dernière section, à proposer une réinterprétation dynamique du paradoxe de Grossman-Stiglitz. L'idée centrale est qu'on peut aller au-delà du simple constat établissant la non existence d'un équilibre informationnellement parfait. En effet, ce qui est alors observé est un **processus dynamique** dans laquelle le nombre des individus qui basent leur anticipation sur la seule observation des prix, les non informés, devient une variable endogène. Plus précisément, si le prix est un bon agrégateur de l'information, le nombre d'imitateurs va croître puisque la seule observation gratuite des prix est alors efficace. Cependant la croissance de l'imitation au sein du marché va affecter la qualité informationnelle du prix : à partir d'un certain seuil d'imitateurs, cette qualité informationnelle se trouvera dégrader. Mais, lorsque l'information contenue dans le prix diminue trop, il devient à nouveau rentable de s'informer et le nombre d'imitateurs se met à décroître entraînant une augmentation de la qualité informationnelle du prix. On obtient ainsi une dynamique de type cyclique. Cette dynamique cyclique nous semble tout à fait conforme à l'esprit des recherches de Grossman et Stiglitz. En effet, même si jamais ils n'en mentionnent la possibilité, les raisonnements qu'ils proposent invitent à une telle interprétation, comme nous tenterons de le montrer. Pour conclure, nous montrerons que cette réflexion sur la dynamique informationnelle conduit à une analyse qualitative du fonctionnement des marchés qui met en avant la possibilité d'une alternance entre des périodes "normales" et des périodes "pathologiques".

## 1. Le paradoxe de Grossman-Stiglitz

Grossman ([3] 1976) considère une situation où n agents ont le choix entre un actif sans risque de rendement $r$ et un actif risqué. A la date 0, sous les hypothèses usuelles, on peut écrire la demande $z_i$ en actif risqué de l'investisseur $i$ sous la forme suivante :

$$z_i(I_i, P_0) = \frac{E(\widetilde{P}_1 \mid I_i) - (1+r)P_0}{a_i Var(\widetilde{P}_1 \mid I_i)} \tag{1.1}$$

où $P_0$ est le prix en 0, $\widetilde{P}_1$ le prix à la date 1, $a_i$ l'aversion pour le risque et $I_i$ l'information de l'agent $i$. On suppose que l'agent $i$ collecte une information $y_i$ définie par :

$$\tilde{y}_i = \tilde{P}_1 + \tilde{\varepsilon}_i \tag{1.2}$$

de telle sorte que $I_i = (y_i, P_0)$. On suppose que le vecteur $\left(\tilde{P}_1, \tilde{\varepsilon}_1, ..., \tilde{\varepsilon}_n\right)$ suit une loi normale d'espérance $\left(\overline{P}_1, 0, ..., 0\right)$ et de matrice de variance-covariance la matrice diagonale ayant pour diagonale $(\sigma^2, 1, ..., 1)$. La condition d'équilibre du marché s'écrit alors :

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} z_i(I_i, P_0) \tag{1.3}$$

On en déduit que le prix $P_0$ est une fonction $f$ de $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$. La notion[2] d'équilibre avec anticipations rationnelles requiert qu'on trouve une fonction $f$ qui soit solution de l'équation 1.3 d'équilibre du marché alors même que les agents l'ont retenue pour calculer leur anticipation $E(\widetilde{P}_1 \mid I_i) = E(\widetilde{P}_1 \mid y_i, P_0 \,;\, f\,)$.[3] Si l'on note $P_0^*(\mathbf{y})$ cette solution, il apparaît que "$P_0^*(\mathbf{y})$ is a self fulfilling expectations equilibrium: when all traders think that prices are generated by $P_0^*(\mathbf{y})$, they will act in such a way that the market clears at $P_0^*(\mathbf{y})$" ([3] p.577).

Grossman démontre que ce problème admet une solution de la forme :

$$P_0^*(\mathbf{y}) = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{y} \tag{1.4}$$

avec :

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i}{n}$$

et $\alpha_0$ et $\alpha_1$, deux constantes dépendant des paramètres du problèmes.[4] Sur la base de l'observation du prix $P_0^*$, chaque agent peut inférer la valeur de $\overline{y}$ qui est un estimateur de $P_1$ plus précis que $y_i$. Comme il s'agit d'une statistique suffisante[5], il en découle que le marché agrège de manière optimale l'ensemble des informations privées. Ce résultat apparemment très positif quant aux capacités informationnelles du marché conduit néanmoins à un paradoxe dans la mesure où il apparaît que :

$$\left\{ \begin{aligned} E(\tilde{P}_1 \mid y_i, \overline{y}) = E(P_1 \mid \overline{y}) &= \frac{\overline{P}_1}{1+n\sigma^2} + \frac{n\sigma^2 \overline{y}}{1+n\sigma^2} \\ \\ Var(\tilde{P}_1 \mid y_i, \overline{y}) = Var(P_1 \mid \overline{y}) &= \frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2} \end{aligned} \right. \tag{1.5}$$

[2] Remarquons que l'ensemble des auteurs étudiés dans le présent article ne fournit guère de raisons vraiment convaincantes pour expliquer que ce soit cet équilibre qui finisse par prévaloir sur le marché. Aucun raisonnement dynamique ne nous est proposé à l'exception de Grossman ([3] p.577) qui esquisse un processus dynamique d'apprentissage bayésien censé converger vers cet équilibre.

[3] Comme le fait remarquer Hellwig ([7] p.480-1), la détermination de l'équilibre d'anticipations rationnelles s'analyse comme un problème de point fixe dans l'espace des fonctions reliant le vecteur des signaux $\mathbf{y}$ au prix d'actif $P_0$.

[4] Grossman ne s'intéresse qu'aux fonctions linéaires. Il ajoute : "We do not know whether there are prices which are non-linear functions of $\mathbf{y}$ and are also equilibria" ([3] p.583).

[5] Ce concept de la théorie statistique signifie que connaître le vecteur $\mathbf{y}$ de toutes les informations privées ou seulement connaître $\overline{y}$ leur moyenne arithmétique est équivalent si l'on cherche à connaître $P_1$. Ce résultat est lié au fait que, dans le modèle de Grosmann, les précisions de toutes les informations $y_i$ sont égales. Dans le cas général, la statistique suffisante serait $\sum y_i/s_i^2$.

Autrement dit, toute l'information étant contenue dans le prix, il devient inutile, pour l'agent $i$, d'utiliser son information privée. Chaque agent $i$ observe que sa propre information $y_i$ est redondante. Mais si tel est le cas, comment le prix peut-il agréger efficacement les informations privées ? Ou encore, le prix révélant toute l'information gratuitement, disparaît toute incitation à collecter une information privée $y_i$ coûteuse. On trouve dans [10] une nouvelle formulation du paradoxe de Grossman-Stiglitz qui nous permettra de bien en saisir la logique.

Soit n individus cherchant à découvrir la valeur de $P$, tirage de $\widetilde{P}$, une variable aléatoire normale d'espérance $\overline{P}$ et de variance $\sigma^2$. Pour ce faire, chaque agent $i$ observe :

$$\tilde{y}_i = P + \tilde{\varepsilon}_i \tag{1.6}$$

avec $\tilde{\varepsilon}_i$ des variables normales indépendantes de moyenne 0 et de variance $s^2$. Par ailleurs ces agents participent à un "marché" défini comme suit. A chaque instant, les agents proposent une évaluation $z_i$ et le "marché" calcule un prix $p$ égal à $\overline{z}$, la moyenne arithmétique des évaluations privées.[6] Les évaluations privées sont estimées à partir de $y_i$ et de $p$, soit :

$$z_i = R(y_i, p) \tag{1.7}$$

On supposera que les agents forment leur évaluation linéairement :

$$z_i = a y_i + (1-a)p \tag{1.8}$$

avec $a$ un paramètre compris entre 0 et 1. Dans ces conditions, on trouve que le prix $p$ vaut :

$$p = \overline{y}$$

quelle que soit la valeur du paramètre $a$. Le prix agrège alors de manière optimale les informations privées. Sur cette base, chaque agent est alors capable de calculer l'efficacité de son évaluation privée, en évaluant sa variance ([10] p.667) :

$$Var(z_i) = \left[(n-1)\,a^2 + 1\right] \frac{s^2}{n} + \sigma^2 \tag{1.9}$$

On note alors que l'évaluation privée est un estimateur de $P$ d'autant plus précis que $a$ est faible. Les agents seront donc amenés à retenir une valeur de $a$ égale à 0. En agissant de cette manière, les agents utilisent au mieux les propriétés

[6] Les raisonnements qui vont suivre se généralise sans difficulté au cas où le prix est une fonction bijective de $\overline{y}$.

informationnelles du prix. Mais, ce faisant, le prix cesse de posséder ces propriétés ! En effet, si $a = 0$, alors on a simplement $z_i = p$ (équation 1.8) : les agents n'utilisent plus leur information privée et le prix ne saurait agréger efficacement les informations privées. N'importe quelle valeur de $p$ est un équilibre.

Cette présentation du paradoxe souligne deux points. D'une part, le paradoxe ne dépend pas du fait que l'information soit coûteuse dans la mesure où ce qui pousse les agents à diminuer $a$ n'est pas seulement le coût de l'information $y_i$, mais également le fait que l'estimateur le plus performant suppose que $a$ soit égal à 0 si $p$ est informationnellement efficace. D'autre part, observons que c'est la question de la divergence des anticipations individuelles qui est également posée. Vouloir que l'efficience informationnelle conduise à ce que tous les agents, grâce au prix, forment une même anticipation, à savoir la meilleure compte tenu de l'information disponible, conduit nécessairement au paradoxe. En effet, une telle situation suppose nécessairement que l'anticipation individuelle, donnée par l'équation 1.7, ne dépende pas de $y_i$ ! La convergence des anticipations se fait au dériment de la qualité informationnelle du prix.

En conclusion de cette première section, il apparaît que la notion de prix informationnellement efficace contient des contradictions logiques internes. Cette conclusion rejoint d'autres réflexions portant sur la nature paradoxale des prix d'équilibre. Considérons, par exemple, un ensemble d'échoppes disséminées sur un certain territoire et produisant toutes un même produit. Si un acheteur croit que la concurrence joue de telle sorte que chaque échoppe propose le même prix, il se dirigera vers la première échoppe sur son chemin pour acheter le produit. Mais, si chaque acheteur agit de même, la concurrence ne joue plus et alors rien n'assure plus que chaque échoppe proposera un même prix. Une histoire d'un même type est celle des deux économistes se promenant sur un trottoir, l'un d'entre eux faisant soudainement remarquer à l'autre que par terre, sur le trottoir d'en face, se trouve un billet de 500 francs. Sans même tourner la tête, le second économiste répond qu'il se trompe. L'autre insistant, le second lui explique que si un tel billet était effectivement présent sur le trottoir d'en face, alors existerait une possibilité d'arbitrage profitable sans risque et qu'une telle situation est impossible. L'autre convaincu, les deux économistes poursuivent leur chemin sans ramasser le billet de 500 francs. Autrement dit la notion d'équilibre informationnel est incomplète dans la mesure où les comportements qu'elle engendre, ceux qui tirent précisément parti au mieux de ses propriétés spécifiques, ne permettent pas à l'équilibre de persister.

Pour surmonter ce paradoxe, nous suivrons deux voies différentes. La première développée par Grossman et Stiglitz [5] d'un côté et Hellwig de l'autre [7] propose de faire intervenir une source supplémentaire d'incertitudes, ce qui permet de faire apparaître une notion robuste d'équilibre. Nous l'analyserons dans la deuxième section. Dans la troisième section, nous nous intéresserons à une approche dynamique des situations précédentes.

## 2. Les équilibres informationnellement imparfaits

L'idée centrale de cette première approche est claire. Il s'agit d'introduire une nouvelle source d'incertitudes de telle sorte que les prix ne communiquent plus parfaitement l'information collectée par les agents informés. Pour ce faire, on suppose que l'offre $Z$ (équation 1.3) est une variable aléatoire notée $\widetilde{Z}$. Le plus souvent, on justifie cette hypothèse de chocs exogènes sur l'offre par la présence des "liquidity traders", c'est à dire d'agents qui achètent ou vendent pour des raisons liées à leur besoin de liquidité, besoins qu'on suppose être indépendants des prix.

Lorsqu'on suppose que l'offre est soumise à des chocs exogènes, il apparaît que l'anticipation de l'investisseur $i$ dépend conjointement et du prix $P_0$ et de son information $y_i$ de telle sorte que disparaît le paradoxe précédent : il n'y a plus de contradiction entre la forme du prix d'équilibre et la forme des fonctions $z_i$ de demandes individuelles. C'est Hellwig qui a été le plus loin dans cette voie. Par ailleurs sa modélisation prend en compte nombre d'éléments importants qui avaient été négligés jusqu'à maintenant, à savoir le fait que les diverses informations privées ne sont pas nécessairement d'égale précision[7], et le fait que le poids de l'information $y_i$ dans le prix dépend de l'aversion pour le risque de l'investisseur $i$. En effet, l'information recoltée par un investisseur très adverse au risque intervient peu dans le prix d'équilibre puisque la demande de cet investisseur est peu élastique à ses anticipations conformément au rôle de $a_i$ dans l'équation 1.1. En résumé Hellwig suppose que le vecteur aléatoire $\left(\widetilde{Z}, \tilde{P}_1, \tilde{\varepsilon}_1, ..., \tilde{\varepsilon}_n\right)$ suit une loi normale d'espérance $\left(\overline{Z}, \overline{P}_1, 0, ..., 0\right)$ et de matrice de variance-covariance la matrice diagonale ayant pour diagonale $(\Delta^2, \sigma^2, s_1^2, ..., s_n^2)$. Sous ces conditions[8], Hellwig

[7] Dans [3], on avait $var(\varepsilon_i)$ égal à 1 quel que soit $i$. Dans [10], on avait $var(\varepsilon_i)$ égal à $s^2$ quel que soit $i$.

[8] Pour simplifier les calculs, Hellwig suppose par ailleurs que le taux de rendement $r$ de l'actif sans risque est nul.

démontre qu'il existe un équilibre d'anticipations rationnelles tel que :

$$\widetilde{P}_0 = \pi_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \pi_i \widetilde{y}_i - \gamma \widetilde{Z} \tag{2.1}$$

où les poids $\pi_i$ dépendent des variances $s_i^2$ et des aversions au risque $a_i$. Par exemple, Hellwig démontre que lorsque $a_i s_i^2$ est supérieur à $a_j s_j^2$, alors $\pi_i$ est inférieur $\pi_j$. On peut alors calculer :

$$\begin{cases} E(\widetilde{P}_1 \mid y_i, P_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} y_i + \alpha_{2i} P_0 \\ \\ Var(\widetilde{P}_1 \mid y_i, P_0) = \beta_i \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\alpha_{0i}$, $\alpha_{1i}$, $\alpha_{2i}$ et $\beta_i$ sont des paramètres tels que $\alpha_{1i}$ est différente de 0 dès que $\Delta$ est strictement positif. La fonction $z_i$ est donc bien dépendante de l'information $y_i$ :

$$z_i\left(P_0, y_i\right) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i} y_i + (\alpha_{2i} - 1) P_0}{a_i \beta_i} \tag{2.3}$$

ce qui fait disparaître le paradoxe précédent.

Lorsque $\Delta \to 0$, le prix d'équilibre s'écrit :

$$\tilde{P}_O^* = \frac{1}{\sigma^2 C + 1} \left[ \overline{P}_1 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\widetilde{y}_i}{s_i^2} - \frac{\sigma^2 \overline{Z}}{A} \right] \tag{2.4}$$

avec

$$A \equiv \sum \frac{1}{a_i} \qquad \text{et} \qquad C \equiv \sum \frac{1}{s_i^2}$$

On retrouve globalement le résultat de Grossman, à ceci près que la moyenne arithmétique $\overline{y}$ est remplacé par $\sum y_i / s_i^2$ qui intègre les différences existant dans la précision des signaux individuels. $P_O^*$ est alors une statistique suffisante, ce qui apparaît dans le fait que l'anticipation de l'investisseur $i$ ne dépend plus de son information privée :

$$E(\widetilde{P}_1 \mid y_i, P_0) = \frac{\sigma^2 \overline{Z}}{A\left(\sigma^2 C + 1\right)} + P_O \qquad \text{et} \qquad Var(\widetilde{P}_1 \mid y_i, P_0) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 C + 1} \tag{2.5}$$

Les contradictions internes à cette construction apparaissent avec force lorsqu'on considère le tâtonnement walrasien associé à cette situation. Lorsque le commissaire-priseur crie le prix $P_O$, les investisseurs forment leur demande individuelle conformément aux anticipations données par les équations 2.5. Ce qui donne :

$$z_i\left(P_0, y_i\right) = \frac{\overline{Z}}{a_i A}$$

mais alors : $\sum z_i = \overline{Z}$, quelles que soient les valeurs de $P_O$ et $y_i$. "No matter where the auctioneer begins the auction, and what signals agents have received, the market will clear. There is no mechanism by which the auctioneer can, for given $y_1, ..., y_n$, find the price prescribed by Grossman's formula ... In this case, the communication process is not well defined" ([7] p.490-1). On retrouve l'indétermination du prix mise en avant par Orléan [10].

L'intérêt de l'analyse proposée par Grossman et Stiglitz ([5] 1980) est d'approfondir les résultats précédents en intégrant explicitement le fait que collecter de l'information a un coût. Cela ne constitue plus un obstacle rédhibitoire à l'existence d'un équilibre puisque désormais les prix ne sont plus informationnellement parfaits : si observer $y_i$ est coûteux, en contrepartie cet investissement en information permet l'obtention d'un profit supplémentaire qui échappe aux non informés puisque précisément l'observation des prix ne suffit plus à révéler aux non informés l'information collectée par les informés. Soit $\lambda$, la proportion des informés, celle-ci variera en fonction de la rentabilité relative des deux stratégies, à savoir s'informer au coût $c$ et obtenir une meilleure anticipation ou ne pas s'informer et calculer son anticipation sur la seule base du prix observé. L'équilibre global que calculent Grossman et Stiglitz, impose que la valeur de $\lambda$ soit telle qu'aucun investisseur ne préfère changer de stratégie.

Le modèle que retiennent nos auteurs est le même que précédemment à quelques simplifications près. Il n'y a plus que deux catégories d'agents, les informés et les non informés. D'autre part, les informés ont tous la même aversion au risque $a$, et observent tous la même observation $y$ définie, comme d'habitude, par :

$$\tilde{y} = \tilde{P}_1 + \tilde{\varepsilon} \tag{2.6}$$

Cette simplification signifie que ce modèle ne s'intéresse plus à la question de l'agrégation des informations privées pour se concentrer sur la manière dont cette information est révélée aux non informés. Le vecteur $\left(\widetilde{Z}, \tilde{P}_1, \tilde{\varepsilon}\right)$ suit une loi normale d'espérance $\left(\overline{Z}, \overline{P}_1, 0\right)$ et de matrice de variance-covariance la matrice diagonale ayant pour diagonale $(\Delta^2, \sigma^2, s^2)$. On a alors :

$$z_I\left(P_0, y\right) = \frac{y - RP_0}{as^2} \tag{2.7}$$

avec $R = 1 + r$, et $I$ désignant les investisseurs informés ; et, pour les non informés notés $U$, :

$$z_U(P_O) = \frac{E\left[\widetilde{P}_1 \mid P_0 = P_\lambda(y, Z)\right] - RP_0}{a_i Var\left[\widetilde{P}_1 \mid P_0 = P_\lambda(y, Z)\right]} \tag{2.8}$$

où $P_\lambda(y,Z)$ désigne le prix à la date 0 lorsque la proportion des informés vaut $\lambda$, l'information vaut $y$ et l'offre est égale à $Z$. L'équation d'équilibre du marché 1.3 s'écrit dans ces conditions[9] :

$$\lambda z_I\left(P_0,y\right)+(1-\lambda)z_U(P_O)=Z \tag{2.9}$$

On peut, comme précédemment, calculer l'équilibre avec anticipations rationnelles à la date 0 qu'on notera $P_\lambda^*(y,Z)$. Le résultat central est alors que le prix $P_\lambda^*$ n'est plus informationnellement efficace ; il ne révèle plus parfaitement aux non informés la valeur de $y$ à cause de l'existence du bruit affectant l'offre $\widetilde{Z}$. Plus précisément, Grossman et Stiglitz démontrent que le prix $P_\lambda^*$ révèle aux non informés la quantité $w_\lambda$ définie, pour $\lambda>0$, par :

$$w_\lambda(y,Z)=y-\frac{as^2}{\lambda}\left(Z-\overline{Z}\right)\qquad\text{tel que}\qquad P_\lambda^*(y,Z)=a_0+a_1w_\lambda(y,Z) \tag{2.10}$$

Ce résultat s'interprète aisément. Comme $E(Z)=\overline{Z}$, $w_\lambda$ est donc égal à $y$ plus un bruit blanc. Le prix d'équilibre sera d'autant plus précis que la variance de ce bruit :

$$var\left[w_\lambda(y,Z)\mid y\right]=\frac{a^2s^4}{\lambda^2}\Delta^2 \tag{2.11}$$

sera faible. En effet, dans ce cas, les non informés obtiendront une très bonne approximation de l'information $y$ grâce à l'observation du prix. Il s'ensuit que la qualité informationnelle du prix est d'autant plus grande que l'aversion pour le risque des informés est faible, que l'information qu'ils obtiennent est précise, que la proportion d'informés est grande et que le bruit perturbant l'offre est faible. Ce sont là des résultats conformes à l'intuition. Lorsque $var(\widetilde{Z})=\Delta^2$ est égale à 0, on retrouverait un prix informationnellement parfait. Dans un deuxième temps, Grossman et Stiglitz montrent qu'il existe une valeur de $\lambda$ qui est telle que l'espérance de l'utilité des informés soit égale à celle des non informés. On la notera $\lambda^*$. Elle est strictement comprise entre 0 et 1 et dépend du coût $c$ de l'information $y$.

L'imperfection informationnelle du prix a d'importantes conséquences quant au fonctionnement du marché. Les agents ne pouvant plus inférer parfaitement $y$ de l'observation du prix, leur interprétation est désormais entachée d'erreur puisqu'ils se fondent maintenant sur $w_\lambda$ pour former leurs anticipations, conformément à la formule :

$$E(\widetilde{P}_1\mid P_\lambda^*)=E(\widetilde{P}_1\mid w_\lambda)=\overline{P}_1+\gamma(w_\lambda-\overline{P}_1)=b_0+b_1P_\lambda^* \tag{2.12}$$

[9] Pour être tout à fait précis, notons qu'on a remplacé $Z/n$ par $Z$.

où $\gamma, b_O$ et $b_1$ sont des paramètres dépendant des données du modèle. Autrement dit les agents non informés ne sont plus capables de distinguer, lorsqu'ils observent une modification du prix, entre ce qui est du à une modification de $y$ et ce qui est du à un choc sur $Z$. Si $P_\lambda^*$ baisse en raison d'une hausse de $Z$, conformément à l'équation 2.10, $w_\lambda$ diminue, ce qui conduit les non informés à réviser à la baisse leurs anticipations, et cela bien que $y$ soit resté constant. La possibilité d'interprétations erronées de la part des non informés est la conséquence directe de l'imperfection informationnelle des prix.

On sait que pour Hayek [6] la supériorité du système des prix s'exprime dans le fait qu'il permet à l'ensemble des acteurs de l'économie de prendre les bonnes décisions sur la base de la seule observation des prix, sans rien connaître des raisons spécifiques qui sont à l'origine de tel ou tel ajustement de prix. Cette propriété est à la base du succès des économies décentralisées où chacun est lié à tous mais sans pouvoir connaître ce qui se passe partout dans l'économie. On voit que, dans le cas présent, cela n'est plus exact : la seule connaissance de $P_0$ n'est plus suffisante pour prendre la bonne décision. Il faudrait en plus connaître $Z$, c'est à dire posséder une information spécifique.

L'article de Gennotte et Leland [2] met pleinement en avant l'importance de ces problèmes pour le fonctionnement concret des marchés financiers. Ils écrivent que l'offre dépend des décisions des "liquidity traders", soit[10] :

$$\widetilde{Z} = \widetilde{L} + \widetilde{S} + \overline{m} \tag{2.13}$$

où $\left(\widetilde{L} + \widetilde{S}\right)$ correspond à l'offre des "liquidity traders" et $\overline{m}$ à l'offre exogène. $\widetilde{L}$ et $\widetilde{S}$ sont deux lois normales indépendantes d'espérance 0 et de variance respective $\Sigma_L$ et $\Sigma_S$. On considère trois catégories d'investisseurs : les I, les SI et les U. Il y a d'abord ceux qui possèdent une information $y_i$ sur le prix $P_1$ suivant la même logique que celle de tous les modèles précédents, à savoir :

$$\widetilde{y}_i = P_1 + \widetilde{\varepsilon}_i \tag{2.14}$$

[10] Gennotte et Leland font jouer un grand rôle aux "hedgers". Ils interviennent dans la détermination de l'offre au travers d'un terme noté $\pi$. Leur rôle est essentiel pour expliquer l'existence de discontinuités dans la formation des prix d'équilibre et, tout particulièrement, pour rendre compte du krach de 1987. Cependant leur prise en compte aurait complexifié grandement notre modélisation. Les résultats que ces auteurs obtiennent en l'absence de "hedgers" illustrent pleinement les risques que font courir des prix informationnellement imparfaits, avec l'avantage qu'ils trouvent facilement à s'expliciter dans le cadre des modèles précédents.

avec $var(\widetilde{\varepsilon}_i) = s^2$. On les appellera les I. La précision de l'information des I est d'autant plus grande que le ratio $\sigma^2/s^2$ est fort. Il y a ensuite ceux qui possèdent une information sur l'offre. Plus spécifiquement, on supposera qu'ils connaissent la valeur de $S$. On les appellera les SI. La précision de l'information des SI est d'autant plus grande que $\Sigma_S/\Sigma_L$ est grand. Si ce ratio est élevé, les SI observent en moyenne la plus grande partie des chocs sur l'offre. Il y a enfin les non informés qui n'observent que le prix $P_0$. On les appellera les U. Sur la base des hypothèses retenues dans les modèles précédents, en particulier le fait que $\widetilde{P}_1$ suit une loi $N(\overline{P}_1, \sigma^2)$, on peut trouver un prix $P_0(y_1, ..., y_n, S, L, \overline{m})$ qui soit solution de l'équilibre avec anticipations rationnelles.[11] On obtient :

$$P_O = F(P_1 - \overline{P}_1 - HL - IS) + \overline{P}_1 - K\overline{m} \tag{2.15}$$

où $F$, $H$, $I$ et $K$ sont des paramètres. On peut s'étonner de ne pas retrouver $\overline{y}$ comme argument. Cela tient au fait qu'on a supposé l'économie constituée d'un nombre infini d'agents de telle sorte que $\overline{y}$ est remplacé par la vraie valeur $P_1$ en raison de la loi de grands nombres.[12] Gennotte et Leland proposent une évaluation des paramètres de cette équation correspondant approximativement à la situation du krach de 1987. Ils retiennent que le marché est constitué pour 0.5% de SI, pour 2% de I et pour 97.5% de U. Ils supposent également que $\sigma^2/s^2$ est égal à 0.2 et que $\Sigma_S/\Sigma_L$ est égal à 1. Ils obtiennent alors :

$$P_O = 0.5(P_1 - 1.06 - 19.95L - 8.14S) - 0.04\overline{m} + 1.06 \tag{2.16}$$

Sur cette base, ils comparent la répercussion sur le prix d'un choc sur l'offre selon trois scénarios : (a) ce choc est connu de tous ; (b) seuls les SI en sont informés au travers du signal $S$ ; (c) aucun des investisseurs n'est informé.

Dans le cas du scénario (a), chacun sait que l'offre varie de $\delta\overline{m}$. Il s'ensuit que la variation induite du prix n'aura aucun effet sur les anticipations des investisseurs. On peut alors calculer l'élasticité $e_a$ :

$$e_a = -\frac{\partial P_0}{\partial Z}\frac{Z}{P_0} = -\frac{\partial P_0}{\partial \overline{m}}\frac{\overline{m}}{P_0} = 0.06 \tag{2.17}$$

[11] La recherche de cette solution repose pour tous les articles cités sur la même technologie mathématique, à savoir le fait que lorsque les variables aléatoires sont gaussiennes, on peut calculer sans difficulté les espérances et variances conditionnelles qui sont des combinaisons linéaires des variables observées.

[12] Hellwig fournit une démonstration précise de ce résultat.

Une variation de 1% de l'offre conduit à une modification des prix de 0.06%. Gennotte et Leland considère que "such an elasticity is very much in line with the predictions of traditional models, which do not postulate that investors learn from market prices" ([2] p.1006).

Dans le cas du scénario (b), la situation est très différente car désormais le prix $P_0$ joue un double rôle : d'une part, il joue son rôle traditionnel qui découle de sa présence dans la contrainte budgétaire ; d'autre part, il intervient dans la détermination des anticipations. "This dual role of prices -affecting demand both through the budget constraint and through expectations- leads to very different price elasticities than traditional models, in which prices play only the first role" (p.1000). Dans le cas du scénario (b), tous les agents, à l'exception des SI qui connaissent l'origine de la diminution des prix, vont réviser à la baisse leur anticipation en raison de la diminution de $P_0$. Il en découle qu'ils se montreront peu désireux d'acquérir le supplément d'offre, ce qui conduira à une chute des prix plus importante. On a :

$$e_b = -\frac{\partial P_0}{\partial Z}\frac{Z}{P_0} = -\frac{\partial P_0}{\partial S}\frac{\overline{m}}{P_0} = 6 \tag{2.18}$$

L'élasticité est 100 fois supérieure à la précédente ! Un choc de 1% conduirait à une baisse des prix de 6%. On observe par ailleurs que ce sont les SI qui absorbent la plus grande part de $\delta S$, l'offre nouvelle : alors qu'ils ne représentent que 0.5% du marché, ils absorbent 54% de cette offre. Comme les investisseurs I utilisent conjointement le prix $P_0$ et leur signal $\widetilde{y}_i$ pour former leurs anticipations, ils seront amenés à modérer la révision à la baisse de leurs anticipations. Bien que représentant 2% du marché, ils absorbent 18% du supplément d'offre. Enfin les agents U sont ceux qui répercutent le plus largement la baisse des prix dans leurs anticipations. Bien que représentant 97.5% du marché, ils n'absorbent que 28% de l'offre nouvelle.

Dans le scénario (c), les SI n'observent plus l'existence d'un choc conduisant à une augmentation de l'offre. Ils ne seront donc plus enclins à absorber le supplément d'offre qui vient perturber le marché. Dans ces conditions, l'élasticité va être encore plus élevée, les prix devant chuter fortement pour conduire les agents à accroitre leur demande au niveau de $\delta L$ :

$$e_c = -\frac{\partial P_0}{\partial Z}\frac{Z}{P_0} = -\frac{\partial P_0}{\partial L}\frac{\overline{m}}{P_0} = 14 \tag{2.19}$$

Les I demeurent des éléments régulateurs dans la mesure où ils reçoivent des informations spécifiques sur le niveau des prix futurs, ce qui leur permet d'être moins sensibles aux variations observées de $P_0$. C'est ainsi qu'ils aborbent 40% de l'offre supplémentaire alors qu'ils ne représentent que 2% du marché. Leur contribution sera d'autant plus importante qu'ils seront plus nombreux et que le signal qu'ils observent sera plus précis, à savoir $\sigma^2/s^2$ élevé.

Pour comprendre ce double rôle des prix et ses conséquences sur la liquidité des marchés financiers, il est intéressant de noter la similitude de cette situation avec celle étudiée par Akerlof [1] et Stiglitz [13] à propos des marchés sur lesquels la qualité des produits est incertaine. Dans ce cas, la demande dépend simultanément du prix et de la qualité anticipée du produit, soit :

$$Demande = D\left(p, q^a\right)$$

avec $p$, le prix et $q^a$, la qualité anticipée. Pour les individus ne possédant aucune information directe sur la qualité du produit échangé, c'est l'observation du prix qui sert alors de base à leur anticipation. On montre en effet que, si l'on suppose les anticipations rationnelles, il existe une fonction $q(p)$ telle que :

$$q^a = E(q \mid p) = q(p) \quad \text{avec} \quad q'(p) > 0$$

C'est bien cette même logique de marché qu'on retrouve dans le cas financier. Ce sont les anticipations sur l'espérance et la variance du prix futur qui constituent alors l'équivalent de la qualité anticipée, ce qui est pleinement conforme à l'intuition. On sait qu'une telle structure ne respecte plus nécessairement les propriétés walrassiennes traditionnelles qui supposent que le prix n'intervienne qu'au travers de la contrainte budgétaire.[13] Par exemple, si l'on calcule l'élasticité-prix de la demande, on obtient :

$$-\frac{dD}{dp}\frac{p}{D} = \left(-\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial D}{\partial q}q'\right)\frac{p}{D} < -\frac{\partial D}{\partial p}\frac{p}{D}$$

L'élasticité-prix diminue fortement du fait de la présence d'un nouveau terme négatif, $-\frac{\partial D}{\partial q}q'$, qui mesure l'action des prix via les anticipations sur la qualité. On retrouve les résultats de Gennotte et Leland.[14] Soulignons que, dans certains exemples étudiés par Akerlof ou Stiglitz, ce nouveau terme domine le terme traditionnel de telle sorte qu'on observe une modification du signe de l'élasticité, la demande devenant une fonction croissante du prix.

[13] On peut se reporter à la présentation générale qui en est donnée dans [9].

[14] Gennotte et Leland obtiennent une augmentation des élasticités, $e_a$, $e_b$ et $e_c$, mais celles-ci sont les inverses des élasticités-prix.

## 3. Le rôle du mimétisme dans l'efficacité informationnelle

Les analyses précédentes ont fait apparaître des anticipations du prix $P_1$ qui ont tous en commun de dépendre positivement du prix observé $P_0$ (équations 1.5, 2.2, 2.5 et 2.12). Pour les définir, on peut parler d'anticipations mimétiques. La rationalité du mimétisme informationnel a été mis en avant par Orléan dans plusieurs textes qu'il a consacrés à cette question ([11], [12]). Si l'individu A voit B acheter un titre X, il est rationnel pour A de modifier à la hausse son évaluation du titre X dans la mesure où il est conduit logiquement à interpréter le comportement de B comme étant la conséquence d'une information positive concernant le titre X. On peut parler d'influences informationnelles pour qualifier ce mode spécifique d'interactions.[15] L'intérêt des réflexions développées par Orléan dans [12] est de proposer un cadre d'analyse qui rende compte des dynamiques, collectives et individuelles, d'apprentissage. C'est en effet une limitation des modèles précédents que de raisonner uniquement à l'équilibre, tout particulièrement lorsqu'on considère le modèle de Grossman 1976 [3] puisqu'on y démontre qu'il n'existe pas d'équilibre informationnellement efficace[16] ! Mais alors, dans ce cas, que se passe-t-il ? Comme on est nécessairement hors de l'équilibre, se fait sentir la nécessité d'outils permettant de modéliser de telles situations. Pour s'en convaincre à nouveau, considérons l'exemple que donnent Grossman et Stiglitz dans leur article commun de 1976. Ils considèrent le marché spot d'une denrée agricole quelconque et remarquent qu'il existe une incitation à créer un marché à terme pour ce produit dans la mesure où les anticipations des agents sur le prix spot futur $P_s$ divergent. Ils montrent, grâce à leur analyse de l'efficacité informationnelle, qu'une fois le marché à terme institué, le prix $P_f$ qui s'y forme agrège parfaitement l'ensemble des informations privées de telle sorte que la seule observation de $P_f$ permet de connaître exactement la valeur de $P_s$. Mais cette propriété détruit la divergence des anticipations qui étaient au fondement du marché à terme : "there is a fundamental problem ... Since the futures price predicts the spot price perfectly, there is no need for hedging and there will be no trade. But without trade,

[15] Rappelons qu'il est d'autres formes d'influences que celles qui passent par l'évaluation du contenu informationnel de l'action qu'on imite : on peut imiter pour se faire bien voir des autres, ou par pur conformisme, et dans ces deux cas on ne se soucie nullement du contenu informationnel du comportement imité.

[16] Une autre question que pose ce type de démarche est plus générale et concerne l'ensemble des modèles étudiés précédemment : l'équilibre avec anticipations rationnelles est-il une représentation pertinente du fonctionnement des marchés financiers ? A travers quels processus les investisseurs apprennent-ils les lois jointes liant $P_0$ et $P_1$ ?

there is no market; but without a market their beliefs will differ" ([4] p.250). On est à nouveau confronté à une boucle paradoxale où chaque terme contredit sa prémisse ! Comment décrire une telle situation ? Nous allons montrer qu'une approche dynamique permet de résoudre le paradoxe.

La modélisation du marché qu'Orléan propose est très schématisée. Les investisseurs n'ont le choix qu'entre deux stratégies, notées $h$ et $l$. La rentabilité de ces deux stratégies dépend de l'état du monde décrit par la variable aléatoire binaire $\tilde{\theta}$. Quand $\{\theta = H\}$, c'est la stratégie $h$ qu'il convient de choisir ; quand $\{\theta = L\}$, c'est la stratégie $l$ qui est la plus rentable. Les agents ne peuvent observer directement la valeur de $\tilde{\theta}$, mais chaque investisseur $i$ s'informe en observant une réalisation indépendante $\sigma_i$ du signal aléatoire $\sigma$ défini par :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\sigma = + \mid H) = \mathrm{P}(\sigma = - \mid L) = p > 0.5 \\ \mathrm{P}(\sigma = - \mid H) = \mathrm{P}(\sigma = + \mid L) = 1 - p < 0.5 \end{cases} \tag{3.1}$$

L'information qu'apporte $\sigma$ est d'autant plus précise que $p$ est proche de 1. Si l'on fait l'hypothèse que les états $\{\theta = H\}$ et $\{\theta = L\}$ sont équiprobables, on en déduit, d'après la règle de Bayes, que :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\theta = H \mid \sigma_i = +) = p \\ \\ \mathrm{P}(\theta = H \mid \sigma_i = -) = 1 - p \end{cases}$$

Dans ces conditions, il est aisé d'établir qu'un agent $i$ qui observe $\{\sigma_i = +\}$, choisira $h$. S'il observe $\{\sigma_i = -\}$, il choisira $l$. On mesure l'imprécision de l'information fournie par $\sigma$ au fait qu'en moyenne, une proportion $(1-p)$ d'agents reçoit le signal $\{-\}$ quand $\{\theta = H\}$, ou $\{+\}$ quand $\{\theta = L\}$ (équation 3.1), ce qui les conduit à choisir la mauvaise stratégie. Pour améliorer leurs performances, les investisseurs seront donc amenés à utiliser également l'information contenue dans le prix.

On trouve dans [12] une modélisation dynamique de ce processus : à l'instant $t$, on note $f(t)$ la proportion d'investisseurs qui ont choisi la stratégie $h$. $f(t)$ représente l'opinion collective du marché et l'on suppose que le prix $P(t)$ est une fonction bijective de $f(t)$. Il en découle que le choix en $(t+1)$ de l'investisseur $i$ dépend de son information privée $\sigma_i$ et de l'observation de $f(t)$. On retrouve ici la structure des modèles précédents mais dans un cadre dynamique. Pour que la dynamique que suit $f(t)$ soit parfaitement définie, il faut au préalable préciser comment chaque agent effectue son choix.

Soit $(\sigma_i, f)$, les informations collectées par l'investisseur $i$. Supposons que $\{\sigma_i = +\}$ et que $\{f \geq 0.5\}$. Dans ce cas, les deux informations vont dans le même sens : $\{\sigma_i = +\}$ indique que $\{\theta = H\}$ est la situation la plus probable et $\{f \geq 0.5\}$ signale à l'investisseur que le marché croit également à cette éventualité. Dans ce cas l'investisseur choisira $h$ avec une probabilité égale à 1. Supposons maintenant que $\{\sigma_i = +\}$ et que $\{f < 0.5\}$. Dans cette situation, les deux informations sont contradictoires. L'investisseur peut soit suivre son information personnelle et choisir $h$, soit aller dans le sens de la majorité du marché et choisir $l$. Dans ce dernier cas, on parlera de comportement mimétique puisque l'individu décide de suivre la majorité du marché alors que son information personnelle lui indique le choix contraire. On caractérisera l'individu par la probabilité $\mu$ qu'il fasse le choix mimétique. On peut alors décrire les choix individuels par les fonctions $q_\mu(f,\sigma_i)$ qui donnent la probabilité de choisir $h$ quand l'information de notre investisseur est $(f,\sigma_i)$ :

$$\begin{cases} f \geq 0.5 & q_\mu(f,+) = 1 \\ \\ f < 0.5 & q_\mu(f,+) = 1 - \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f > 0.5 & q_\mu(f,-) = \mu \\ \\ f \leq 0.5 & q_\mu(f,-) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

$\mu$ mesure la propension au mimétisme de l'agent considéré. Plus $\mu$ est élevé, plus l'individu accorde de poids à l'opinion collective relativement à son information personnelle. Pour $\mu = 0$, l'investisseur se fie uniquement à son information personnelle. La fonction de choix $q_0(f, \sigma_i)$ :

$$\begin{cases} q_0(f,+) = 1 \\ \\ q_0(f,-) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

est alors indépendante de $f$ pour ne dépendre que de la valeur de $\sigma_i$. Pour $\mu = 1$, l'individu est totalement mimétique : il imite le côté majoritaire du marché quelle que soit son information privée.

Dans un premier temps, Orléan analyse la dynamique stochastique engendrée par un marché sur lequel tous les agents sont caractérisés par la même valeur de $\mu$. La valeur initiale de $f$ à l'instant 0 est supposée quelconque. Puis, à chaque instant $t > 0$, un investisseur est tiré au hasard dans le groupe. Il observe $\sigma_i$ et la valeur de l'opinion collective $f(t-1)$, et révise son choix conformément à la fonction de choix $q_\mu(f(t-1), \sigma_i)$. Orléan démontre que, pour n'importe quelle valeur de $\mu \in [0, 1[$, ce processus est ergodique. On note $P_{st}(f, \mu, \theta)$ la distribution stationnaire lorsque l'état du monde vaut $\theta$. Pour simplifier la présentation des résultats, nous nous placerons uniquement dans le cas où l'état du monde $\theta$ vaut $\{H\}$. Quand $\{\theta = H\}$, l'efficacité du marché se mesure aisément : elle est d'autant plus grande que $f(t)$ est proche de 1.

Orléan montre qu'il existe une valeur $\mu^*$ telle que pour $\mu \leq \mu^*$, la distribution stationnaire $P_{st}(f, \mu, H)$ est unimodale. Elle possède un unique pic noté $f_I(\mu, H)$, dont la valeur est donnée par :

$$f_I(\mu, H) = p + (1-p)\mu \tag{3.4}$$

Pour $\mu = 0$, on trouve que $f_I(0, H) = p$. Ce résultat n'est pas surprenant. Si l'état du monde est $\{H\}$, alors la probabilité d'observer $\{\sigma_i = +\}$ est égale à $p$ conformément à l'équation 3.1. Or, lorsque $\mu = 0$, les individus choisissent leur stratégie sur la seule base de leur information $\sigma_i$, il s'ensuit que tous ceux qui ont observé $\{+\}$ choisiront $h$ et que tous ceux qui ont observé $\{-\}$ choisiront $l$. $f$ sera donc proche de $p$.

Lorsque $\mu$ augmente tout en restant inférieur à $\mu^*$, la valeur de $f_I(\mu, H)$ augmente (équation 3.4). Autrement dit, une plus grande proportion d'investisseurs font le bon choix[17], à savoir suivre la stratégie $h$. Cette amélioration des performances collectives du groupe est une conséquence du mimétisme. Il permet à certains individus qui ont eu la malchance d'observer $\{-\}$ de corriger leur erreur grâce à l'observation de l'opinion collective du marché. En effet, l'équation 3.2 nous dit que la probabilité de choisir $h$ lorsqu'on observe ($f > 0.5$ et $\{-\}$) vaut $\mu$. Le mimétisme est ici un comportement parfaitement rationnel. Il résulte de la prise de conscience par les opérateurs du fait que le prix contient une information pertinente. C'est grâce au mimétisme qu'est diffusée à l'ensemble des individus, l'information globale du marché. Le marché est alors rendue plus efficace grâce à l'imitation.

Malheureusement si $\mu$ devient trop grand, i.e. si $\mu$ dépasse $\mu^*$, la situation se modifie radicalement. Un nouveau pic $f_M(\mu, H)$ apparaît et la distribution stationnaire $P_{st}(f, \mu, H)$ devient bimodale. La valeur de ce nouveau pic est donnée par :

$$f_M(\mu, H) = (1-\mu)p \tag{3.5}$$

Il s'agit d'une situation où le nombre d'individus ayant choisi $h$ devient inférieur à 0.5. On assiste alors, dans le voisinage de cette configuration, à une dégradation extrême de l'efficacité du marché. Cette situation est l'expression d'une

[17] Cette interprétation est justifiée par le fait que la distribution stationnaire est très concentrée autour du pic $f_I$ de telle sorte que $f$ se tient dans un voisinage étroit autour de cette valeur.

dynamique d'auto-validation qui est rendue possible dès lors que la composante mimétique des comportements devient importante. La propension à suivre l'opinion majoritaire l'emporte alors sur la force des informations privées et peut donc conduire à une opinion globale déconnectée de l'état du monde $\theta$. Quand $\mu$ augmente, le pic $f_I(\mu, H)$ tend vers 1 (équation 3.4), à savoir l'unanimité sur le bon choix ; et $f_M(\mu, H)$ tend vers 0 (équation 3.5), à savoir l'unanimité sur le mauvais choix. On peut montrer que globalement la situation $\{\mu = 0\}$ est préférable aux situations obtenues avec $\mu > \mu^*$.

L'ensemble de ces résultats démontre le caractère ambivalent du mimétisme. Imiter est un comportement collectivement efficace tant que la propension à imiter reste suffisamment faible de façon à conserver la qualité informationnelle de l'opinion collective qu'on imite. Si la propension à imiter est trop forte, alors rien n'assure plus le lien entre l'opinion collective et l'état du monde. L'imitation devient contre-productive. Elle engendre des bulles spéculatives. Ce résultat concernant l'ambivalence de l'imitation va nous permettre de résoudre le paradoxe de Grossman-Stiglitz.

On considère désormais que les individus $i$ déterminent la valeur de leur paramètre $\mu_i$ de façon à optimiser leur prévision de l'état du monde $\theta$[18]. La valeur optimale de $\mu_i$ dépend alors de la qualité informationnelle relative de $f_{st}$ par rapport à celle de $\sigma_i$. On supposera par ailleurs, comme le font Grossman et Stiglitz dans leurs articles, que les opérateurs intervenant sur le marché sont des "price-takers". Autrement dit, ils pensent que les propriétés de $f$ sont indépendantes de la valeur de leur $\mu_i$.[19]

Dans ces conditions, considérons l'individu $n$. La valeur des paramètres pour les autres investisseurs est donnée par $\left(\mu_1, ..., \mu_{n-1}\right)$ avec :

$$\overline{\mu} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\mu_i}{n} \tag{3.6}$$

Supposons que $\bar{\mu} \leq \mu^*$, et calculons la valeur optimale $\mu_{op}$ de $\mu_n$. Pour ce faire, calculons la probabilité que l'investisseur $n$ qui suit la règle $q_{\mu_n}$ fasse le bon choix. Quand $\theta = \{H\}$, il fait le bon choix, $h$, avec la probabilité 1 quand $\{\sigma = +\} \cup \{f_{st} \geq 0.5\}$ est observé ; avec la probabilité $(1 - \mu_n)$ quand $\{\sigma = +\} \cup \{f_{st} < 0.5\}$

[18] Orléan démontre dans [12] que le processus stochastique que suit $f$ quand les individus ont des valeurs de $\mu\,(i)$ distinctes est identique au processus stochastique que suit $f$ quand les individus ont un même $\mu$ égal à la moyenne arithmétique des $\mu\,(i)$.

[19] Cette proposition est vraie quand le nombre d'intervenants sur le marché est très grand, comme le démontre Hellwig dans [7].

est observé ; et avec la probabilité $\mu_n$ quand $\{-\} \cup \{f_{st} > 0.5\}$ est observé. Il en découle que la probabilité de faire le bon choix est égale à :

$$pB + (1-\mu_n)pA + \mu_n(1-p)C \simeq p + \mu_n\left(C-p\right) \tag{3.7}$$

avec :

$$A = \Pr ob(f_{st} < 0.5), \quad B = \Pr ob(f_{st} \geq 0.5) \text{ et } C = \Pr ob(f_{st} > 0.5) \simeq B = 1 - A$$

Lorsque $\{\theta = H\}$ et $\overline{\mu} \leq \mu^*$, on sait que $f_{st}$ suit la loi de probabilité $P_{st}(f, \bar{\mu}, \theta)$. On a alors $C > p$ ; ce qui veut dire que $f_{st}$ est un meilleur estimateur que $\sigma$. Il s'ensuit que la probabilité que $n$ fasse le bon choix, est une fonction croissante de $\mu_n$. La valeur optimale de $\mu_n$ est alors égale à 1. Ce résultat n'est pas surprenant : quand $\bar{\mu} \leq \mu^*$, comme $f_{st}$ est un meilleur révélateur de $\theta$ que $\sigma$, il en découle qu'il vaut mieux s'appuyer sur $f_{st}$ que sur $\sigma$. On peut démontrer de la même manière que quand $\bar{\mu} < \mu^*$, alors $\mu_{op} = 0$. En effet, dans une telle situation, $f_{st}$ est un signal très biaisé de $\theta$ et il est alors plus rentable de s'en tenir à sa propre information.[20]

Ce résultat nous dit qu'il convient d'être mimétique quand les autres ne le sont pas et de ne pas l'être quand les autres le sont. C'est là une proposition qui est conforme à l'intuition. Elle peut être dite paradoxale au sens où elle n'est pas généralisable sans contradiction. Autrement dit, il n'existe pas un ensemble $(\mu_1, ..., \mu_n)$ de valeurs qui soit un équilibre de Nash, ce que nous venons de démontrer. Ce résultat saisit quelque chose du paradoxe de Grossman-Stiglitz : quand le prix est informationnellement efficace, alors chacun a intérêt à devenir un pur imitateur ($\mu = 1$), mais il s'ensuit que les individus n'utilisent plus leur information privée et que le prix cesse d'être informationnellement efficace. En effet, le marché peut aussi bien converger vers l'état $\{f = 1\}$ que vers l'état $\{f = 0\}$. On retrouve ici le résultat d'Hellwig quant à l'indétermination du prix.

Cette analyse va plus loin dans la mesure où elle nous dit quelque chose sur le processus dynamique que suivent les $\mu_i$. Pour ce faire, nous nous contenterons de proposer l'étude qualitative d'un scénario plausible. Considérons une situation telle que $\bar{\mu}$ est inférieur à $\mu^*$. Dans une telle situation, les agents apprennent progressivement les corrélations existant entre $\theta$ et le prix. Les investisseurs comprennent que le prix est un bon estimateur de $\theta$ qu'il convient d'utiliser pour

[20] La démonstration de ce résultat est un peu plus difficile que la démonstration précédente dans la mesure où la distribution stationnaire a deux pics et que l'on peut montrer que la probabilité de transition d'un pic à un autre est extrêmement faible. Il faut alors tenir compte de cette quasi non-ergodicité pour calculer la probabilité de faire le bon choix (cf [12]).

rendre plus performantes ses anticipations. Cet apprentissage conduit à une augmentation progressive des $\mu_i$. Dans un premier temps, cette augmentation a un effet bénéfique sur les prix. Elle renforce encore leur efficacité informationnelle, ce qui, en retour, accentue la tendance à la hausse des $\mu_i$. Cependant, à partir d'un certain seuil $\mu^*$, les comportements mimétiques deviennent si intenses qu'ils peuvent donner lieu à des processus d'auto-validation. Si l'état du monde $\theta$ n'a pas changé, le prix demeure au voisinage de $f_I$ et l'instabilité nouvelle du marché passe inaperçu aux yeux des investisseurs. En revanche, la modification de l'état du monde $\theta$ fait alors apparaître un phénomène de bulles : les investisseurs ne modifient pas leur ancienne stratégie en raison d'un fort mimétisme alors que les conditions économiques nécessitent un changement d'anticipations. Lorsque les investisseurs se rendent compte du caractère pervers de cette situation, ils diminuent fortement la part que joue l'opinion collective dans leurs anticipations. Il s'ensuit une baisse des $\mu_i$ qui rétablit l'efficacité informationnelle des prix. La boucle est bouclée.

Cette description est très sommaire, mais il ne s'agissait pas ici pour nous de fournir un modèle précis de l'évolution des $\mu_i$. Notre but était plus modeste : faire valoir que les analyses développées par Grossman et Stiglitz sur l'impossible efficacité informationnelle des marchés ont une importante dimension dynamique qui n'a pas été suffisamment pensée. Si l'on se place dans un cadre dynamique, le paradoxe disparait et fait place à un processus de nature cyclique. Il nous semble qu'il y a dans les mouvements longs des marchés financiers où alternent périodes "normales" et périodes marquées par de forts engouements, une oscillation qu'il serait intéressant de relier à nos hypothèses.

# References

[1] Akerlof, George A. "The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism." *Quarterly Journal of Economics* 84, no. 3 (août 1970): 488-500.

[2] Gennotte, Gerard, and Leland, Hayne. "Market Liquidity, Hedging, and Crashes." *The American Economic Review* 80, no. 5 (décembre 1990):999-1021.

[3] Grossman, Sanford J. "On the Efficiency of Competitive Stocks Markets Where Traders Have Diverse Information." *Journal of Finance* 31 (mai 1976): 573-85.

[4] Grossman, Sanford J., and Stiglitz, Joseph E. "Information and Competitive Price Systems." *The American Economic Review* 66, no. 2 (mai 1976): 246-253.

[5] Grossman, Sanford J., and Stiglitz, Joseph E. "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets." *The American Economic Review* 70, no. 3 (juin 1980): 393-408.

[6] Hayek, Friedrich A. "The Use of Knowledge in Society." *The American Economic Review* 35, no. 4 (septembre 1945), traduit par "L'utilisation de l'information dans la société." *La Revue Française d'Economie* 1, no. 2 (automne 1986): 117-135.

[7] Hellwig, Martin F. "On the Aggregation of Information in Competitive Markets." *Journal of Economic Theory* 22(1980): 477-498.

[8] Keynes, John M. *Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie.* Petite Bibliothèque Payot, 1971.

[9] Orléan, André. "Logique walrasienne et incertitude qualitative : des travaux d'Akerlof et Stiglitz aux conventions de qualité." *Economies et Sociétés*, série Œconomia, PE no. 14 (janvier 1991):339-364.

[10] Orléan, André. "Analyse des phénomènes d'influence." *Revue Economique* 45, no. 3 (mai 1994): 657-672.

[11] Orléan, André. "Bayesian Interactions and Collective Dynamics of Opinion: Herd Behavior and Mimetic Contagion.", *Journal of Economic Behavior and Organization* 28 (octobre 1995): 257-274.

[12] Orléan, André. "Informational Influences and the Ambivalence of Imitation." *Rapports et Documents du CREA* no. 9702, janvier 1997, 18 pages.

[13] Stiglitz, Joseph E. "The Causes and Consequences of the Dependence of Quality on Prices." *Journal of Economic Literature* 25 (mars 1987): 1-48.