

Décision dans le risque et l'incertain : L'apport des modèles non additifs

Michèle Cohen et Jean-Marc Tallon†‡*

Avril 2000

Résumé

Nous exposons dans cet article les avancées de la théorie de la décision en environnement incertain au cours des vingt dernières années. Plus précisément, nous partons des modèles d'espérance (objective et subjective) d'utilité pour ensuite en présenter les généralisations récentes. Nous montrons que ces généralisations permettent de décrire un plus grand nombre de comportements économiques (dans le risque et l'incertain) que les modèles usuels. Enfin, nous nous attachons à montrer que ces modèles sont maniables et présentons certaines applications économiques.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Formalisation d'un problème de décision dans l'incertain	5
2.1	Un exemple introductif	5
2.2	Notations et définitions	6
3	Décision dans le risque	8
3.1	Risque et accroissement de risque	9
3.2	Comportements face au risque	10
3.2.1	Aversion pour le risque	10
3.2.2	Prime de risque et comparaison de comportements . . .	11
3.3	Le modèle d'espérance d'utilité	11
3.3.1	Le théorème de von Neumann-Morgenstern	12
3.3.2	Caractérisation des notions d'aversion pour le risque. . .	13

*EUREQua, Université de Paris I, 106-112 bld de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13. cohenmd@univ-paris1.fr.

†EUREQua-CNRS, 106-112 bld de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13. jmtallon@univ-paris1.fr

‡Nous remercions Alain Chateauneuf, Marc-Arthur Diaye, Thibault Gajdos, Jean-Yves Jaffray, Meglena Jeleva, Jean-Max Koskiewicz, Eric Langlais, Jean-Christophe Vergnaud et Bertrand Wigniolle ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires et suggestions.

3.3.3	Valeur locale de la prime de risque, coefficient absolu d'aversion pour le risque	14
3.3.4	Variance et modèle d'espérance d'utilité	14
3.4	Quelques problèmes soulevés par le modèle d'espérance d'utilité	15
3.4.1	Le "paradoxe" d'Allais	15
3.4.2	La double interprétation de la fonction d'utilité	16
3.4.3	Aversion faible et aversion forte dans le modèle d'espérance d'utilité	17
3.4.4	Problèmes soulevés par le choix de la dominance seconde pour mesurer l'accroissement de risque dans le modèle d'espérance d'utilité	17
3.5	Le modèle d'"utilité dépendante du rang"	17
3.5.1	Le principe de la chose sûre comonotone dans le risque .	18
3.5.2	Représentation des préférences	19
3.5.3	Interprétations graphiques	20
3.5.4	Diversité des notions d'aversion pour le risque et leur caractérisation	22
3.6	Méthodes expérimentales d'évaluation des paramètres d'un modèle	23
4	Décision dans l'incertain	24
4.1	Approche bayésienne : le modèle d'espérance subjective d'utilité	24
4.2	Problèmes soulevés par le modèle d'espérance subjective d'utilité	25
4.2.1	Le "paradoxe" d'Ellsberg	25
4.2.2	Aversion pour l'ambiguïté	26
4.3	Le modèle d'utilité "à la Choquet"	26
4.3.1	Le principe de la chose sûre comonotone	27
4.3.2	La notion de capacité	27
4.3.3	Représentation des préférences et intégrale de Choquet .	28
4.3.4	Modèle d'utilité dépendante du rang et modèle d'utilité à la Choquet	29
4.3.5	Le modèle de Schmeidler	30
4.3.6	Pessimisme, aversion pour l'incertain et aversion pour l'ambiguïté	30
4.4	Le modèle <i>multi-prior</i>	32
4.4.1	L'axiomatique du modèle	32
4.4.2	Modèle <i>multi-prior</i> et modèle d'utilité à la Choquet . .	33
4.5	Quelques observations complémentaires	34
4.5.1	Information subjective versus information objective . . .	34
4.5.2	Cohérence dynamique	35
5	Applications	35
5.1	Notions d'accroissements de risque	36
5.2	Prix d'actif	36

5.3	Partage du risque	38
5.4	Asymétries d'information	40
5.5	Théorie des jeux	41
6	Remarques finales	42

1 Introduction

La plupart des décisions économiques se prennent dans un environnement incertain : les agents sont amenés à prendre des décisions dont les conséquences ne sont pas connues avec certitude, comme par exemple des décisions d'investissement ou d'assurance. La formalisation d'un tel problème de choix en environnement incertain est donc cruciale en économie. Notre but dans cet article est de présenter plusieurs modélisations possibles, d'en étudier les forces et les faiblesses, et enfin d'analyser les implications de chacune d'entre elles dans des problèmes économiques classiques.

La première composante nécessaire à toute modélisation est de reconnaître quelles sont les sources d'incertitude et l'information dont on dispose sur cette incertitude, la seconde étape étant d'étudier comment cette information affecte la valorisation des décisions. La notion de bien contingent a été introduite en économie à cet effet. Un même bien physique n'a pas la "même utilité" selon les circonstances dans lesquelles il est consommé. Il apparaît donc que la théorie classique du choix en environnement certain peut se transposer à la théorie de la décision en environnement incertain simplement en redéfinissant le notion de bien. Si cette solution a effectivement parfois été retenue (Debreu (1959)), elle ne fait que peu de cas de la structure particulière de l'environnement incertain dans lequel se fait le choix de la meilleure décision. La notion naturelle de croyances, par exemple, n'y apparaît pas explicitement. Aussi la théorie de la décision en environnement incertain a-t-elle cherché à spécifier un peu plus avant la représentation des préférences des agents dans un tel contexte.

Une solution, très largement adoptée par les économistes, est donnée par le modèle d'espérance d'utilité, dû à von Neumann et Morgenstern (1947) et Savage (1954). Ce modèle possède deux qualités principales : premièrement il sépare les croyances sur les sources d'incertitude, représentées par des probabilités sur des événements incertains, de l'utilité pour les gains certains, représentée par une fonction d'utilité sur les conséquences certaines ; deuxièmement, la fonction représentant les préférences est linéaire par rapport aux probabilités. Par ailleurs, l'axiomatique sur laquelle ce modèle repose est intuitive et séduisante. Enfin, il gomme la distinction entre des situations de risque (dans lesquelles les probabilités, dites "objectives" sur les événements incertains sont données –par exemple, parier à la roulette) et des situations d'incertitude (dans lesquelles les probabilités ne sont pas données –par exemple, parier à des courses de chevaux), puisque le modèle d'espérance subjective d'utilité de Savage (1954) permet de ramener toute situation d'incertitude

à une situation de risque, c'est-à-dire d'incertitude *probabilisée*, même si la probabilité mise en évidence est maintenant subjective et non plus objective.

Ces qualités suffisent à expliquer le succès du modèle d'espérance d'utilité comme moyen de représenter les préférences d'agents évoluant dans un environnement incertain. Pour autant, ce modèle reflète-t-il les comportements réels des individus confrontés à des choix dans une telle situation ? Plus précisément, deux questions se posent. Premièrement, est-il raisonnable de supposer que tout individu est capable d'attribuer une unique distribution de probabilité à toute situation d'incertitude ? Deuxièmement, même lorsqu'il existe une distribution de probabilité, l'individu se comporte-t-il conformément au modèle d'espérance d'utilité ?

Dès l'apparition du modèle d'espérance d'utilité, plusieurs auteurs (Allais (1953) et Ellsberg (1961) notamment) ont construit des expériences dans lesquelles les sujets, dans leur grande majorité, révèlent par leur choix des comportements en contradiction systématique avec ce modèle que ce soit dans le risque (Allais (1953)) ou dans l'incertain (Ellsberg (1961)). Dans un contexte d'assurance, Mossin (1968) a montré que des agents se conformant au modèle d'espérance d'utilité ne désirent s'assurer totalement que si la prime qu'ils doivent payer est actuarielle (égale à l'espérance de la perte potentielle), en contradiction avec l'observation que beaucoup d'agents s'assurent totalement même lorsque la prime est "chargée". Enfin, certains comportements (comme dans les expériences d'Ellsberg) ne peuvent s'expliquer qu'en acceptant la distinction opérée par Knight (1921) et Keynes (1921) entre risque et incertitude.

Il est étonnant de constater le temps qui s'est écoulé entre ces premières critiques et le développement et l'utilisation de modèles plus généraux que le modèle d'espérance d'utilité, qui *rendent mieux compte des comportements réels des agents économiques*. Malgré quelques tentatives isolées antérieures, ces derniers n'ont été développés de manière systématique qu'à la fin des années 1970. Nous avons choisi de présenter ici la classe de modèles dits *non additifs*, qui conservent certaines propriétés du modèle d'espérance d'utilité telle que la transitivité, mais s'en éloignent en ce qu'ils permettent un traitement non linéaire des probabilités¹.

Dans cet article, nous présentons de manière détaillée cette classe de modèles. Nous nous attacherons à exposer les axiomes sur lesquels ils reposent, en en donnant une interprétation intuitive, ainsi qu'à montrer en quoi ces modèles généralisent le modèle d'espérance d'utilité. Notre souhait est ainsi de familiariser le lecteur avec ces modèles et de montrer que, malgré leur degré de généralité, ils sont aisément utilisables. Nous sélectionnerons plusieurs applications économiques dans lesquelles les conclusions obtenues dans le cadre de modèles non additifs sont plus conformes aux comportements économiques

¹Pour une présentation très générale des modèles récents de choix dans l'incertain, voir Fishburn (1988) et Karni et Schmeidler (1991b). En particulier, nous renvoyons le lecteur à cette dernière référence pour la modélisation des préférences "dépendant de l'état" (*state dependent preferences*).

observés.

Afin de comprendre la richesse de ces modèles, il nous faudra revenir sur la distinction, gommée dans le modèle bayésien d'espérance d'utilité, entre risque (probabilisé) et incertain (non probabilisé), les comportements dans ces deux situations pouvant être radicalement différents. Dans chaque situation, nous donnerons autant que possible des définitions des comportements indépendantes des modèles de représentation des préférences choisis. A contrario, définir l'aversion pour le risque par la concavité de la fonction d'utilité n'a plus de sens en dehors du modèle d'espérance d'utilité. On pourra aussi distinguer plusieurs notions d'aversion pour le risque, reflétant des comportements a priori distincts, mais dont on verra qu'ils sont confondus dans le modèle d'espérance d'utilité, mettant en évidence son caractère restrictif.

Enfin, la présentation adoptée est le résultat d'un arbitrage entre la rigueur de l'exposé et sa simplicité. Ainsi, nous n'avons pas présenté les modèles dans leur version la plus générale possible, et avons essayé de donner l'intuition de certains axiomes en même temps que leur formulation mathématique.

L'article est construit de la manière suivante : Nous commençons dans la section 2 par un exemple et introduisons ensuite les notations et quelques définitions centrales. Les modèles de décision sont successivement étudiés, comparés et critiqués dans les sections 3 pour le risque et 4 pour l'incertain. La section 5 contient plusieurs applications qui mettent en lumière une meilleure adéquation des comportements économiques à des modèles non additifs.

2 Formalisation d'un problème de décision dans l'incertain

Nous introduisons ici un exemple élémentaire, qui nous servira de base d'explication tout au long de cet article et qui nous permettra de faire le lien entre les concepts mathématiques et leur utilisation pour des décisions économiques. Nous généraliserons ensuite les notations et concepts introduits.

2.1 Un exemple introductif

Considérons un agent économique se demandant si, face à un "risque" de sinistre d'un montant connu de L francs, il va prendre, et pour quel montant, une assurance pour une année. Les seuls états de la nature possibles dans cet exemple sont l'absence de sinistre, noté s_1 et l'occurrence du sinistre noté s_2 . Cette description est exhaustive dans le sens où aucune autre source d'aléa n'est présente ici. En particulier, la richesse initiale, notée w_0 , est supposée certaine². La probabilité du sinistre sera notée p . Selon que p est connue ou

²Nous ne traiterons pas ici des modèles dans lesquels la richesse initiale est aléatoire (*background risk*).

inconnue on parlera de risque ou d'incertain³. Le choix de l'agent porte sur les décisions (ou "actes") possibles pour ce problème, à savoir, soit ne rien faire, soit prendre une assurance couvrant tout ou partie du sinistre, s'il se produit.

Une décision peut être considérée comme associant à chaque état de la nature une conséquence, c'est-à-dire ici un niveau de richesse. Ainsi, la décision "ne rien faire" correspond à l'application associant à l'état "pas de sinistre" la conséquence, w_0 , et à l'état "sinistre" la conséquence $w_0 - L$. La décision "assurance totale" correspond quant à elle à l'application constante associant à chaque état la conséquence $w_0 - \pi$, où π est le montant de la prime d'assurance. Enfin, une décision d'assurance partielle, notée d_α , correspond à l'application associant à l'état "pas de sinistre" la conséquence $w_0 - \pi(\alpha)$, et à l'état "sinistre" la conséquence $w_0 - L - \pi(\alpha) + \alpha L$, où $\pi(\alpha)$ est le montant de la prime d'assurance associée à un remboursement de $\alpha\%$ du sinistre. On suppose que l'agent a des préférences sur ces décisions. Dans le cas où p est connue, une décision (ou acte) est une variable aléatoire induisant sur l'ensemble des conséquences une loi de probabilité. Par exemple, la décision d_α est une variable aléatoire dont la loi induite P_α est notée $(w_0 - \pi(\alpha), 1 - p; w_0 - L - \pi(\alpha) + \alpha L, p)$. Dans le cas où p est inconnue, la décision d_α est une application (mesurable) qui sera notée $(w_0 - \pi(\alpha), s_1; w_0 - L - \pi(\alpha) + \alpha L, s_2)$.

Dans la suite de cet article, nous illustrerons avec cet exemple la manière dont l'évaluation de ces décisions dépend des axiomes auxquels obéissent ses préférences et de son attitude vis-à-vis de l'incertain. Auparavant, nous introduisons les notations générales que nous avons esquissées sur cet exemple.

2.2 Notations et définitions

Nous noterons S l'ensemble des états de la nature, \mathcal{A} une σ -algèbre (ou tribu) de sous-ensembles de S . Lorsque la distribution de probabilité objective P sur l'espace (S, \mathcal{A}) est connue, nous dirons que l'agent fait face à une situation de *risque* (ou *incertain probabilisé*). Lorsqu'il n'existe pas de probabilité connue sur S , on parle d'une situation d'*incertain*.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple introductif, le décideur a des préférences sur des décisions qui sont des applications de l'ensemble des états de la nature dans un ensemble de conséquences. Le détail des modèles que nous allons présenter dépend de la structure de l'ensemble des conséquences. A ce stade, il est donc nécessaire d'introduire des notations correspondant à différentes possibilités pour cet ensemble de conséquences.

On note de manière générique \mathfrak{X} l'ensemble des applications de l'ensemble des états de la nature S dans un ensemble de conséquences quelconque \mathfrak{C} .⁴ Un

³Dans le reste de l'article nous utiliserons le terme de risque exclusivement pour désigner de l'incertain probabilisé (c'est-à-dire de probabilité connue).

⁴Dans le cadre particulier de Anscombe et Aumann (1963), l'ensemble des conséquences est lui-même un ensemble de lois à support fini dans \mathbb{R} , que nous noterons \mathfrak{F}_0 . Lorsque l'ensemble des conséquences est un intervalle \mathcal{C} fermé et borné de \mathbb{R} , \mathfrak{X} est l'ensemble des

élément X de \mathfrak{X} est appelé *décision* ou *acte*. On suppose que chaque agent a une relation de préférence large \succsim sur \mathfrak{X} . La préférence stricte sera notée \succ et l'indifférence \sim . La relation de préférence sur \mathfrak{X} induit (grâce aux actes constants) une relation de préférence sur l'ensemble \mathfrak{C} des conséquences. Par abus de notation, nous noterons également \succsim cette relation de préférence sur \mathfrak{C} . Lorsque \mathfrak{C} est déjà ordonné, en particulier lorsqu'il s'agit d'un sous-ensemble de \mathbb{R} , il faudra imposer un axiome de compatibilité entre ces deux relations d'ordre.

Dans tout ce qui suit, nous ferons l'hypothèse que la relation de préférence est un *préordre total*, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et complète. L'hypothèse de totalité de la relation, c'est-à-dire de pouvoir classer toutes les décisions, est une hypothèse très forte dans certains problèmes⁵. Toutefois, cette hypothèse est très largement acceptée dans les modèles économiques, et sera un axiome commun à toutes les théories que nous mentionnerons ici, que ce soit dans le risque ou dans l'incertain.

Axiome 1 (Préordre total) *La relation de préférence \succsim est un préordre total.*

Si l'on rajoute à cet axiome une hypothèse de continuité⁶, la relation \succsim peut être représentée par une fonction d'utilité $V : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est-à-dire que

$$X \succsim Y \iff V(X) \geq V(Y) \quad (1)$$

Nous noterons une décision X à support fini, $X = (x_1, A_1; \dots; x_n, A_n)$ où $x_1 \leq \dots \leq x_n$ et les A_i forment une partition de S .

La notion de comonotonie. La notion de comonotonie va s'avérer centrale pour l'axiomatique des modèles que nous développerons dans cet article. Elle peut être donnée pour un ensemble \mathfrak{X} d'applications de S dans un ensemble ordonné quelconque \mathfrak{C} :

Définition 1 *Deux éléments X et Y de \mathfrak{X} sont dits comotonones s'il n'existe pas de couple $s, s' \in S$ tel que $X(s) \succ X(s')$ et $Y(s) \prec Y(s')$.*

Lorsque l'ensemble des conséquences est un sous-ensemble de \mathbb{R} , la définition se simplifie :

Définition 2 *Deux décisions X et Y de \mathfrak{X} sont dites comotonones si pour tout $s, s' \in S$,*

$$(X(s) - X(s'))(Y(s) - Y(s')) \geq 0$$

fonctions \mathcal{A} -mesurables (une application $X : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ où $X^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\}$, et \mathcal{B} est la tribu des Boréliens) de S dans \mathfrak{C} . Dans cet article, nous considérerons souvent le cas où l'ensemble des conséquences est un intervalle de \mathbb{R} .

⁵Pour des théories relâchant l'hypothèse de transitivité ou de totalité, voir Fishburn (1988).

⁶La forme exacte de cette hypothèse dépend de la structure de \mathfrak{X} . Voir Debreu (1954), Debreu (1959) et Grandmont (1972).

Deux variables comonotones ne peuvent être utilisées à des fins de couverture (*hedging*) : en effet, si X et Y sont comonotones, elles “rapportent” toutes les deux plus dans l’état s que dans l’état s' et donc toute combinaison linéaire positive de ces deux variables va préserver cet ordre. Il est alors impossible de s’assurer contre la “variabilité” des paiements de X avec la décision Y .

Illustrons cette notion sur l’exemple suivant. Soit les cinq applications définies sur l’espace $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ par :

	s_1	s_2	s_3
X_1	1	2	3
X_2	-5	0	9
X_3	10	5	0
X_4	7	3	5
X_5	2	2	2

Toute application étant comonotone à une application constante, X_5 est comonotone à toutes les autres décisions. Les décisions X_1 et X_2 sont comonotones. X_1 et $-X_3$ sont comonotones (on dit aussi que X_1 et X_3 sont anti-comonotones). X_4 n’entretient aucune relation de comonotonie avec X_1, X_2 ou X_3 . Remarquons que la relation de comonotonie n’est pas transitive : X_4 est comonotone à X_5 , X_5 est comonotone à X_1 et pourtant X_4 et X_1 ne sont pas comonotones.

3 Décision dans le risque

Dans cette section, on suppose que le décideur fait face à une “situation de risque” : il connaît la loi de probabilité, exogène, sur l’ensemble des états de la nature. Ici, \mathcal{C} est un sous-ensemble de \mathbb{R} , que nous noterons donc \mathcal{C} . L’ensemble (S, \mathcal{A}) est muni d’une mesure de probabilité notée P . Une décision, élément de \mathfrak{X} , est alors une variable aléatoire de loi image P_X , définie pour tout $B \subset \mathbb{R}$ par $P_X(B) = P\{s \in S \mid X(s) \in B\}$. Puisque chaque décision X induit une loi P_X sur \mathbb{R} , et sous l’hypothèse assez naturelle que deux variables aléatoires de même loi sont toujours indifférentes, la relation de préférence \succsim sur l’ensemble \mathfrak{X} , muni de \succsim , induit sur l’ensemble des lois de probabilité à support dans \mathcal{C} une relation de préférence que nous noterons aussi \succsim , par abus de notation.

Même si le recours aux lois peut sembler moins naturel que la modélisation en termes d’actes (qui s’assimilent au concept économique de bien contingent), il simplifie beaucoup la formalisation d’un problème de décision dans le risque.

Nous travaillerons donc sur l’ensemble \mathcal{L} des lois de probabilité à support dans \mathcal{C} muni de la relation \succsim . Le décideur a donc à comparer des lois de probabilité entre elles. Dans cette comparaison, il est naturel qu’il attache une importance particulière au “risque” de ces lois.

Remarque 1 *Nous n’utiliserons pas le terme de loterie, plus imagée, car nous travaillerons à la fois sur des lois discrètes et continues.*

Il nous faut à ce stade, après avoir introduit quelques notations, définir ce que l'on entend par un accroissement de risque.

3.1 Risque et accroissement de risque

Nous noterons \mathcal{L}_0 le sous-ensemble des lois de \mathcal{L} à support fini ; dans ce cas, la loi de la variable aléatoire X sera notée $P_X = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$ où $x_1 \leq \dots \leq x_n$, $p_i \geq 0$ et $\sum p_i = 1$. Sa loi image P_X a pour fonction de répartition $F_X(x) = P(\{s \in S : X(s) \leq x\})$. Son espérance sera notée $E(X)$.

Il existe plusieurs définitions possibles de la notion d'accroissement de risque, et à chacune d'entre elles est associée une notion correspondante d'“aversion pour le risque”, ceci indépendamment du modèle de décision utilisé.

La notion de plus grande variance comme mesure d'accroissement du risque peut sembler intuitive⁷ mais nous verrons dans la section 3.3.4 qu'elle peut conduire à des incohérences.

En économie, la notion usuelle d'accroissement de risque est celle associée à la dominance stochastique d'ordre deux, notée (DS2). Plus formellement, on dit que Y est plus risquée que X au sens DS2 (ou X DS2 Y) si, pour tout $T \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^T F_Y(x) dx \geq \int_{-\infty}^T F_X(x) dx$$

Cette relation ne classe que partiellement les lois de \mathcal{L} . Si de plus, X et Y ont même espérance, on dit que Y est un étalement à moyenne constante de X , ou encore, Y MPS X .⁸ Si Y MPS X , la variance de Y est supérieure ou égale à la variance de X . La réciproque n'est pas toujours vérifiée (voir paragraphe 3.3.4)

Cette définition n'est pas très intuitive et la proposition suivante permet, dans le cas où X et Y ont même espérance, de donner une caractérisation plus compréhensible de cette notion.

Proposition 1 (Rothschild et Stiglitz (1970)) Soient X et Y deux variables de même espérance. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Y est un étalement à moyenne constante de X , soit Y MPS X
- (ii) Y a même loi que $(X + \theta)$ où $E(\theta|X) = 0$ presque partout.
- (iii) Pour tout u croissante et concave de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int u(x) dF_X(x) \geq \int u(x) dF_Y(x)$.

La caractérisation (ii) révèle le caractère intuitif de cette définition puisqu'elle exprime que Y est un étalement à moyenne constante de X lorsque Y peut être obtenue en ajoutant à X un “bruit”. La caractérisation (iii) va trouver son intérêt dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité que nous verrons plus loin (cf. remarque 4).

⁷Cette notion est d'ailleurs utilisée en finance, dans le MEDAF par exemple.

⁸MPS pour *Mean Preserving Spread*.

Illustrons ceci sur l'exemple introductif : soit deux décisions d'assurance d_{α_1} et d_{α_2} où $\alpha_1 > \alpha_2$. Lorsque la prime ne contient pas de chargements proportionnels à son contenu actuariel ($\pi(\alpha) = \alpha pL$), on peut voir que d_{α_2} est un accroissement du risque à moyenne constante de d_{α_1} .

Cette notion d'accroissement de risque bien que très utilisée en économie n'est pas exempte de critiques (certaines déjà relevées par Rothschild et Stiglitz (1971) et que nous exposerons dans le paragraphe 3.4.4). Une autre notion d'accroissement de risque basée sur la notion de comonotonie (définie par Schmeidler (1989) et Yaari (1987)), est celle d'accroissement monotone de risque, développée par Quiggin (1992). Une variable aléatoire Y est un *accroissement monotone de risque à moyenne constante* de la variable X si Y a même loi que $X + Z$ où Z est comonotone à X et $E(Z) = 0$. La comonotonie entraîne que, quel que soit l'état de la nature, Z ne peut servir de couverture à X : dans les états où le résultat de X est "mauvais", celui de Y est "pire" et inversement, dans les états où le résultat de X est "bon", celui de Y est meilleur. Dans ce cas, considérer Y comme plus risquée que X semble difficilement contestable (pour plus de détails sur cette notion d'accroissement du risque, voir Chateauneuf, Cohen, et Kast (1997) et Chateauneuf, Cohen, et Meilijson (1997a)).

Il existe plusieurs autres définitions d'accroissement de risque que nous ne détaillerons pas ici, bien que certaines de ces notions soient parfois plus adaptées à des problèmes de statique comparative (pour des définitions et les propriétés caractéristiques de ces notions, ainsi que des exemples d'applications, voir Chateauneuf, Cohen, et Meilijson (1997b) et Safra et Zilcha (1988)).

3.2 Comportements face au risque

Nous revenons maintenant au problème de choix d'un agent, muni d'une relation de préférence \succsim sur \mathfrak{X} et de la relation correspondante sur \mathcal{L} .

3.2.1 Aversion pour le risque

Nous pouvons définir différentes notions d'aversion pour le risque. Nous en distinguerons deux ici.

Définition 3 (*Arrow (1965), Pratt (1964)*) *Un agent a de l'aversion faible pour le risque si pour toute variable aléatoire X de \mathfrak{X} , il préfère à cette variable aléatoire la certitude de son espérance⁹ :*

$$\forall X \in \mathfrak{X}, E(X) \succsim X$$

Définition 4 (*Rothschild et Stiglitz (1970)*) *Un agent a de l'aversion forte pour le risque si pour tout couple de variables aléatoires X, Y de \mathfrak{X} de même*

⁹ $E(X) \succsim X$ est un abus de notation pour $\Phi_{E(X)} \succsim X$ où $\Phi_{E(X)}$ est la loi de Dirac en $E(X)$. Nous adopterons cette notation par la suite.

espérance, et telles que Y est plus risquée que X au sens de la dominance seconde, il préfère la variable la moins risquée X à Y :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}, E(X) = E(Y), Y \text{ MPS } X \implies X \succsim Y$$

Remarque 2 La terminologie que nous utilisons ici n'est pas celle employée par les auteurs mentionnés, car, comme nous le verrons dans le paragraphe 3.3.2, ces deux notions sont confondues dans le modèle d'espérance d'utilité.

En remarquant que, pour tout X , X est un étalement à moyenne constante de $E(X)$, un agent ayant de l'aversion forte pour le risque a également de l'aversion faible pour le risque. L'implication réciproque n'est pas vérifiée en général.¹⁰

Un décideur qui préfère la variable aléatoire X à son espérance a du goût faible pour le risque. Un décideur qui préfère toujours la variable la plus risquée au sens de la dominance seconde a du goût fort pour le risque. Enfin, un décideur qui compare les lois en ne comparant que leurs espérances sera dit neutre vis-à-vis du risque. Il convient de remarquer que tout décideur qui, pour certains couples ($Y \text{ MPS } X$) préfère la variable la plus risquée et, pour d'autres couples, la variable la moins risquée n'entre dans aucune de ces catégories.

3.2.2 Prime de risque et comparaison de comportements

Pour chaque variable aléatoire X de \mathfrak{X} , son *équivalent certain* est le nombre¹¹ c_X qui procure la même satisfaction que X : $c_X \sim X$. Dans tous les modèles considérés dans cet article, toute variable aléatoire de \mathfrak{X} possède un unique équivalent certain.

On définit alors la *prime de risque* de X , notée ρ_X , comme étant la différence entre l'espérance de X et son équivalent certain : $\rho_X = E(X) - c_X$. Cette prime est le montant que l'agent est prêt à payer pour échanger la variable X contre son espérance. Cette prime est négative dès que l'agent a du goût pour le risque.

La prime de risque est un moyen de mesurer l'intensité de l'aversion faible pour le risque. Il est possible d'en déduire des comparaisons partielles de comportements d'agents : un agent 1 a *plus d'aversion faible pour le risque* qu'un agent 2 si pour tout $X \in \mathfrak{X}$, la prime de risque ρ_X^1 de l'agent 1 est supérieure ou égale à la prime de risque ρ_X^2 de l'agent 2.

¹⁰Intuitivement, ces deux notions capturent deux comportements a priori distincts : un agent peut vouloir éviter de supporter le moindre risque et préférer l'espérance avec certitude mais préférer, lorsque son choix s'effectue entre des décisions toutes deux risquées (et qu'il ne peut éviter le risque), la plus risquée qui peut faire espérer de meilleurs résultats.

¹¹Nous faisons ici abstraction de la richesse initiale des agents. Il est possible de définir des concepts plus précis tels que la disponibilité à payer ou à recevoir (*willingness to pay*, *willingness to accept*) qui tiennent compte de la richesse initiale des agents. Voir par exemple Kahneman et Tversky (1979), Eeckhoudt et Gollier (1992) et Courtault et Gayant (1999).

3.3 Le modèle d'espérance d'utilité

Jusqu'à présent, nous avons pu donner des définitions intrinsèques (indépendantes du modèle de décision utilisé par l'agent) de l'aversion pour le risque, de l'équivalent certain,... Nous allons maintenant exposer le modèle "dominant" de décision dans le risque : le modèle d'*espérance d'utilité* (*EU*) de von Neumann et Morgenstern (1947) et voir ce que deviennent, dans ce modèle, les notions développées jusqu'à présent.

3.3.1 Le théorème de von Neumann-Morgenstern

Le modèle est basé, en plus de l'axiome de préordre total, sur un axiome de continuité et un axiome d'indépendance. Avant d'énoncer ces axiomes, nous devons d'abord définir l'opération de *mixage de lois de probabilité* (ou, dans le cas discret *combinaison de loteries*). Pour tout $P, Q \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in [0, 1]$, on appelle α -mixage des lois P et Q , la loi $R = \alpha P \oplus (1 - \alpha)Q$, telle que, pour tout A de \mathcal{A} , $R(A) = \alpha P(A) + (1 - \alpha)Q(A)$. Le mixage de deux lois de probabilité peut s'interpréter, lorsque P et Q sont des lois discrètes, comme une loterie à deux étapes : lors de la première étape, les lois P et Q sont tirées avec probabilité α et $(1 - \alpha)$, tandis que lors de la seconde étape, une conséquence est choisie selon la loi de probabilité sélectionnée lors de la première étape.

Axiome 2 (Continuité) *La relation de préférence \succsim est continue (au sens de Jensen (1967)) : pour tout P, Q, R de \mathcal{L} , $\exists \alpha, \beta \in]0, 1[$ tel que $\alpha P \oplus (1 - \alpha)R \succ Q$ et $Q \succ \beta P \oplus (1 - \beta)R$.*

L'axiome d'indépendance que nous énonçons maintenant est l'axiome central du modèle d'espérance d'utilité.

Axiome 3 (Indépendance) *Pour tout P, Q, R de \mathcal{L} et pour tout $\alpha \in]0, 1[$,*

$$P \succsim Q \iff \alpha P \oplus (1 - \alpha)R \succsim \alpha Q \oplus (1 - \alpha)R$$

L'interprétation de cet axiome peut s'énoncer de la manière suivante (en liaison avec l'interprétation du mixage de deux lois que nous avons donnée). L'agent qui préfère P à Q et qui doit faire un choix entre les deux mixages $\alpha P \oplus (1 - \alpha)R$ et $\alpha Q \oplus (1 - \alpha)R$ tient le raisonnement suivant : si un événement de probabilité $(1 - \alpha)$ se produit, il obtient la même loi R , indépendamment de son choix, tandis que si l'événement complémentaire se produit, il a le choix entre P et Q , et comme il préfère P , il préfère globalement le mixage $\alpha P \oplus (1 - \alpha)R$. La logique de cet axiome peut sembler intuitive. Toutefois, de nombreuses études expérimentales (comme le paradoxe d'Allais) ont montré que la plupart des décideurs font leur choix en contradiction avec cet axiome. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

Dans le cas fini, c'est-à-dire si l'on se restreint à l'ensemble \mathcal{L}_0 des lois à support fini dans \mathcal{C} , le théorème de représentation de \succsim s'énonce de la manière suivante.

Théorème 1 (von Neumann et Morgenstern) Soit l'ensemble \mathcal{L}_0 des lois de probabilité à support fini dans \mathcal{C} muni de la relation de préférence \succsim . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mathcal{L}_0, \succsim)$ satisfait aux axiomes de préordre total, continuité, indépendance et monotonie.

(ii) Il existe une fonction d'utilité U représentant la relation \succsim avec

$$U(P) = Eu(P) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$$

où u est une application de \mathcal{C} dans \mathbb{R} définie par $u(x) = U(\Phi_x)$ et est continue, croissante et définie à une transformation affine croissante près¹².

Ce théorème se généralise à l'ensemble \mathcal{L} des lois de probabilité à support dans l'ensemble \mathcal{C} tout entier. Il faut dans ce cas rajouter un axiome de dominance. Pour une loi P à support borné dans \mathbb{R} , de fonction de répartition F , la fonction d'utilité s'écrit alors $U(P) = Eu(P) = \int_{\mathbb{R}} u(x) dF(x)$.

On voit bien dans cette formulation pourquoi le modèle d'espérance d'utilité est qualifié de modèle linéaire : il traite les probabilités de manière linéaire, c'est-à-dire que $U(\alpha P \oplus (1 - \alpha)Q) = \alpha U(P) + (1 - \alpha)U(Q)$.

Pour des énoncés intuitifs des axiomes et des démonstrations élégantes de ce théorème (dans les cas fini et infini), voir Jensen (1967), Fishburn (1970), Fishburn (1982) et Kreps (1988).

Remarque 3 Le comportement d'un décideur qui satisfait aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité, est entièrement caractérisé par la fonction u .

Dans l'exemple de la section 2.1, l'espérance d'utilité d'une décision partielle d'assurance d_α , s'écrit

$$Eu(d_\alpha) = (1 - p)u(w_0 - \pi(\alpha)) + pu(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L)$$

3.3.2 Caractérisation des notions d'aversion pour le risque.

Les deux notions d'aversion pour le risque que nous avons définies indépendamment de tout modèle sont en fait confondues dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité.

Proposition 2 Lorsque le décideur satisfait au modèle d'espérance d'utilité, les trois assertions suivantes sont équivalentes¹³ :

- (i) Le décideur a de l'aversion faible pour le risque.
- (ii) Le décideur a de l'aversion forte pour le risque.
- (iii) La fonction d'utilité u du décideur est concave.

¹²C'est-à-dire que toute fonction $v = au + b$ avec $a > 0$ est également admissible.

¹³L'équivalence (i) \iff (iii) est immédiate. L'équivalence (ii) \iff (iii) a été démontrée par Rothschild et Stiglitz (1970).

Remarque 4 En utilisant la proposition précédente, on peut réinterpréter la caractérisation de la notion d'accroissement du risque basée sur la dominance seconde de Rothschild et Stiglitz (1970) (proposition 1 (iii)) de la manière suivante : une variable Y est un accroissement du risque à moyenne constante de X si et seulement si $E(X) = E(Y)$ et si X est préférée à Y par tout décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité et ayant de l'aversion faible pour le risque.

Remarque 5 La proposition 2 révèle par ailleurs que dans le modèle d'espérance d'utilité, on ne peut distinguer l'aversion faible de l'aversion forte. Pour les utilisateurs de ce modèle, cette distinction n'a pas lieu d'être et on parlera simplement d'*aversion pour le risque* sans risque de confusion.

3.3.3 Valeur locale de la prime de risque, coefficient absolu d'aversion pour le risque

Dans ce modèle, il est possible de donner à partir des propriétés de la fonction u une représentation de l'intensité de l'aversion pour le risque d'un décideur.

Définition 5 *Lorsque u est strictement croissante et deux fois continuellement dérivable, on appelle coefficient absolu d'aversion pour le risque, la fonction R_A de \mathcal{C} dans \mathbb{R} définie par*

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Remarquons que ce coefficient est indépendant du représentant u choisi (parmi toutes les fonctions d'utilité du type $av + b$).

Quand la loi de X d'espérance x et de variance σ^2 , prend ses valeurs sur un intervalle $[x - h, x + h]$ où h est "petit" par rapport à x , on peut démontrer (Arrow (1965) et Pratt (1964)) que la prime de risque est proportionnelle au coefficient absolu d'aversion pour le risque :

$$\rho_X(x) \approx -\frac{\sigma^2 u''(x)}{2 u'(x)} = \frac{\sigma^2}{2} R_A(x)$$

Cette approximation permet de séparer dans l'expression de la prime de risque une partie objective dépendant uniquement de la variance de la loi, de la partie subjective liée aux préférences du décideur, $R_A(x)$. Ce résultat permet de démontrer un théorème de comparaison de comportement pour des décideurs dans le modèle d'espérance d'utilité.

Théorème 2 (Arrow (1965) et Pratt (1964)) *Soient deux décideurs 1 et 2 satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité, caractérisés respectivement par des fonctions d'utilité u_1 et u_2 strictement croissantes et deux fois continuellement dérivables. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) 1 a (strictement) plus d'aversion pour le risque que 2 : $\rho_X^1 \geq (>) \rho_X^2$.
- (ii) Il existe une fonction croissante (strictement) concave φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $u_1 = \varphi(u_2)$.
- (iii) le coefficient absolu d'aversion pour le risque de u_1 est supérieur ou égal (strictement supérieur) au coefficient absolu d'aversion pour le risque de u_2 pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R_A^1(x) \geq (>) R_A^2(x)$.

Remarque 6 L'équivalence entre (i) et (ii) reste vraie même lorsque u_1 et u_2 ne sont pas deux fois continuellement dérivables.

3.3.4 Variance et modèle d'espérance d'utilité

Nous avons vu dans la remarque 4 que la notion d'accroissement du risque au sens de la dominance seconde avait une justification certaine dans le modèle d'espérance d'utilité. La variance quant à elle n'est pas un bon indicateur d'accroissement de risque comme le montre l'exemple suivant¹⁴ (Ingersoll (1987)).

Considérons les deux loteries $P = (0, 1/2; 4, 1/2)$ et $Q = (1, 7/8; 9, 1/8)$. On a $E(P) = E(Q)$ et $Var(Q) > Var(P)$. Choisissons un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité, ayant de l'aversion pour le risque et dont la fonction d'utilité est concave et de la forme $u(x) = \sqrt{x}$. On peut vérifier que, pour ce décideur, $Q \succ P$, c'est-à-dire que l'espérance d'utilité de la loterie P qui a la plus petite variance est inférieure à celle de Q . Ainsi, dans le modèle d'espérance d'utilité, un décideur ayant de l'aversion pour le risque ne préfère pas nécessairement la variable ayant la plus petite variance (à moyenne constante).

Remarquons toutefois que quand $u(x)$ est un polynôme du second degré (comme par exemple dans le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)), un agent ayant de l'aversion pour le risque préférera toujours, à moyenne égale, la loi de plus petite variance.

3.4 Quelques problèmes soulevés par le modèle d'espérance d'utilité

Nous passons ici en revue quelques problèmes soulevés par le modèle d'espérance d'utilité¹⁵. Nous commençons par quelques problèmes descriptifs et soulignons ensuite certaines implications théoriques contre-intuitives de ce modèle.

3.4.1 Le "paradoxe" d'Allais

Dès 1953, Allais (1953) construit un couple d'alternatives pour lequel la majorité des sujets interrogés choisit en désaccord avec l'axiome d'indépen-

¹⁴D'autres exemples pourraient être développés. (voir Meyer (1987)).

¹⁵Pour une synthèse de ces problèmes, voir par exemple Machina (1987).

dance. Nous présentons d'abord une version modifiée de cet exemple (Kahneman et Tversky (1979)).

Les sujets doivent choisir d'abord entre les deux loteries A : gagner 3.000 euros avec probabilité 1, ou B : gagner 4.000 euros avec probabilité 0,8 et 0 avec probabilité 0,2, puis, de manière indépendante, entre les deux loteries C : gagner 3.000 euros avec probabilité 0,25 et 0 avec probabilité 0,75 ou D : gagner 4.000 euros avec probabilité 0,2 et 0 avec probabilité 0,8. Cette expérience, renouvelée maintes fois et dans des contextes différents, donne toujours des résultats similaires : une grande majorité de sujets choisit les loteries (A) et (D), en contradiction avec l'axiome d'indépendance¹⁶. Les résultats de ce type d'expérience n'ont pas convaincu les tenants du modèle d'espérance d'utilité, qui reconnaissent certaines défaillances descriptives du modèle, mais qui considèrent son aspect normatif comme plus important.

Nous présentons maintenant l'expérience originelle d'Allais, qui permet de repérer plus facilement en quoi il y a violation de l'axiome d'indépendance. Il est proposé aux sujets de choisir entre les loteries suivantes (l'unité est le million d'euros) :

L_1 : gagner $1M$ avec certitude

L_2 : gagner $1M$ avec probabilité 0,89, $5M$ avec probabilité 0,10, et 0 avec probabilité 0,01

puis entre les loteries suivantes :

L'_1 : gagner $1M$ avec probabilité 0,11 et 0 avec probabilité 0,89

L'_2 : gagner $5M$ avec probabilité 0,10 et 0 avec probabilité 0,90

Lorsqu'on leur demande de choisir entre les deux premières loteries, la plupart des sujets choisissent L_1 . Lorsque ces mêmes sujets doivent choisir entre les deux dernières loteries, la majorité préfère L'_2 . Ces choix constituent une violation de l'axiome d'indépendance. En effet, soit P la loterie qui donne $1M$ avec probabilité 1 et Q la loterie qui donne 0 avec probabilité $1/11$ et $5M$ avec probabilité $10/11$. On peut vérifier que :

$$L_1 = 0,11P \oplus 0,89\Phi_1$$

$$L_2 = 0,11Q \oplus 0,89\Phi_1$$

$$L'_1 = 0,11P \oplus 0,89\Phi_0$$

$$L'_2 = 0,11Q \oplus 0,89\Phi_0$$

où Φ_0 est la loterie "gagner zéro avec probabilité 1" et Φ_1 est la loterie "gagner $1M$ avec probabilité 1". Les choix observés sont donc en contradiction avec l'axiome d'indépendance.

¹⁶En effet, puisque $C = 0,25A \oplus 0,75\Phi_0$ et $D = 0,25B \oplus 0,75\Phi_0$ où Φ_0 est la loterie "gagner zéro avec probabilité 1", les deux seuls couples de choix en accord avec l'axiome d'indépendance sont (A, C) ou (B, D) .

3.4.2 La double interprétation de la fonction d'utilité

En plus des violations expérimentales de l'axiome d'indépendance, le modèle d'espérance d'utilité soulève aussi une difficulté théorique, à savoir l'interprétation de la fonction u . En effet, la fonction u a un double rôle : (i) elle exprime l'attitude du décideur vis-à-vis du risque (la concavité de u impliquant l'aversion pour le risque), (ii) elle exprime la satisfaction des résultats dans le certain (la concavité de u impliquant une utilité marginale décroissante de la richesse). En particulier, il est impossible dans ce modèle de représenter un agent qui aurait à la fois une utilité marginale décroissante et du goût pour le risque. Si le modèle d'espérance d'utilité a le mérite de la *parcimonie*, il ne permet pas de séparer la représentation de l'attitude vis-à-vis du risque de celle vis-à-vis de la richesse dans le certain. Ce sera le cas dans des modèles moins parcimonieux mais plus flexibles que nous étudierons plus loin.

3.4.3 Aversion faible et aversion forte dans le modèle d'espérance d'utilité

Comme nous l'avons vu dans la remarque 5, les notions d'aversion pour le risque faible et forte ne peuvent être distinguées dans le modèle d'espérance d'utilité. On peut en effet interpréter la proposition 2 comme une limite du modèle d'espérance d'utilité : *tout agent ayant de l'aversion faible pour le risque sans pour autant avoir de l'aversion forte ne peut satisfaire aux axiomes de ce modèle*. En fait, on peut montrer (Safra et Zilcha (1988) et Chateauneuf, Cohen, et Meilijson (1997b)) que de nombreuses notions d'aversion pour le risque correspondant à différents ordres stochastiques sur les variables aléatoires sont confondues dans le modèle d'espérance d'utilité et il n'est donc pas étonnant que ce modèle manque de flexibilité pour rendre compte de la diversité des comportements face à des accroissements de risque dans différents problèmes. Ce ne sera plus le cas dans un modèle plus général (le modèle d'utilité dépendante du rang) que nous présenterons dans une section ultérieure.

3.4.4 Problèmes soulevés par le choix de la dominance seconde pour mesurer l'accroissement de risque dans le modèle d'espérance d'utilité

Malgré la bonne adéquation de la notion d'accroissement du risque (au sens de la dominance seconde) au modèle d'espérance d'utilité, cette notion peut conduire à quelques résultats contre-intuitifs. Citons-en deux. Le premier concerne le choix de portefeuille. Dans le problème classique de choix entre un actif sans risque et un actif risqué, une prédiction naturelle serait la suivante : si le rendement de l'actif risqué devient plus risqué au sens *MPS*, tout investisseur ayant de l'aversion pour le risque devrait en demander moins. Rothschild et Stiglitz (1971) ont démontré que cette prédiction n'est pas toujours vraie dans le modèle d'espérance d'utilité. Le second a trait au choix d'assurance.

Un décideur ayant plus d'aversion pour le risque qu'un autre n'est pas nécessairement prêt à payer au moins autant pour obtenir la même réduction de risque à moyenne constante (voir, par exemple, Ross (1981)).

3.5 Le modèle d'“utilité dépendante du rang”

Le modèle que nous traitons dans cette section, le modèle d'utilité dépendante du rang (*RDEU* pour *Rank Dependent Expected Utility*) est né des faiblesses du modèle d'espérance d'utilité à rendre compte des comportements et généralise ce dernier. Le modèle d'utilité espérée fournissait une représentation des préférences de la forme $\sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$ où le poids de décision p_i attribué au résultat x_i est indépendant de ce dernier. A priori, sur la base de comportements observés, ces poids de décision peuvent dépendre des résultats d'une manière quelconque. Toutefois, faire dépendre ces poids uniquement du *rang* des résultats permet déjà d'expliquer la plupart des “paradoxes” du modèle d'espérance d'utilité. Nous présentons maintenant les fondements axiomatiques d'une telle représentation.

3.5.1 Le principe de la chose sûre comonotone dans le risque

L'axiome central du modèle d'espérance d'utilité, l'axiome d'indépendance, est également celui qui semble le plus souvent invalidé dans les faits. L'idée de base du modèle d'utilité dépendante du rang est en conséquence d'affaiblir cet axiome¹⁷, et d'abandonner de ce fait la linéarité par rapport aux probabilités. Le modèle d'utilité dépendante du rang a été développé par Quiggin (1982) sous le nom d'utilité anticipée (*Anticipated Utility*). Yaari (1987), Segal (1987) et Allais (1988) ont développé des variantes de ce modèle. Par souci de simplicité, nous travaillons ici sur \mathcal{C} , intervalle fermé et borné de \mathbb{R} . Des axiomatiques plus générales ont été développées par Wakker (1994) et Chateauneuf (1999).

L'axiome central de ce modèle est l'axiome de la chose sûre comonotone dans le risque (voir par exemple Chateauneuf (1999)) :

Axiome 4 Soient $P = (x_1, p_1; \dots; x_k, p_k; \dots, x_n, p_n)$ et $Q = (y_1, p_1; \dots; y_k, p_k; \dots, y_n, p_n)$ deux éléments de \mathcal{L} tels que $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq \dots \leq y_k \leq \dots \leq y_n$ avec $x_{k_0} = y_{k_0}$ pour un certain k_0 et soient P' et Q' les loteries obtenues en remplaçant x_{k_0} par x'_{k_0} dans les loteries P et Q de telle sorte que $x_{k-1} \leq x'_{k_0} \leq x_{k+1}$, $y_{k-1} \leq y'_{k_0} \leq y_{k+1}$. Alors,

$$P \succsim Q \iff P' \succsim Q'$$

Remarque 7 Dans l'énoncé de l'axiome, la modification des loteries P et Q ne change pas l'ordre de leurs résultats. Les variables aléatoires associées canoniquement à ces lois (c'est-à-dire X et Y valent respectivement x_k et y_k

¹⁷Machina (1982a) développe une axiomatique où il abandonne purement et simplement l'axiome d'indépendance.

sur un ensemble E_k de probabilité p_k , $1 \leq k \leq n$) restent donc deux à deux comonotones.

Peut être la manière la plus simple de comprendre la signification de l'axiome 4 est-elle de revenir à l'exemple originel d' Allais (1953) que nous avons développé dans le paragraphe 3.4.1, en présentant les loteries dans le tableau suivant

		Probabilités			
		0,01	0,89	0,1	
Loteries	L_1	1 M	1 M	1 M	(2)
	L_2	0	1 M	5 M	
	L'_1	1 M	0	1 M	
	L'_2	0	0	5 M	

Comme il est aisé de le voir dans le tableau (2), le passage des loteries L_1 et L_2 aux loteries L'_1 et L'_2 implique bien le changement d'une valeur commune, mais ce changement ne préserve pas le rang de cette conséquence commune dans les loteries. Plus précisément, la valeur commune de 1 M (avec probabilité 0,89) dans les loteries L_1 et L_2 correspond à une valeur intermédiaire (ie, au second rang), tandis que la valeur commune 0 M (avec probabilité 0,89) dans les loteries L'_1 et L'_2 correspond à la plus petite valeur possible (ie, au premier rang). Le choix (L_1, L'_2) ne contredit pas le principe de la chose sûre comonotone dans le risque puisque les loteries comparées ne satisfont pas aux conditions d'application de cet axiome (elles ne sont pas comonotones).

3.5.2 Représentation des préférences

Il est alors possible de caractériser le comportement d'un décideur dont les préférences satisfont à cet axiome (plus un certain nombre d'autres axiomes que nous ne développons pas ici), par deux fonctions u et φ , continues et croissantes. La fonction $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, définie à une transformation affine croissante près, joue le rôle de la *fonction d'utilité dans le certain* ; tandis que la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant à $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ est unique et joue le rôle de la *fonction de transformation des probabilités*. Un tel décideur préfère la variable aléatoire X de fonction de répartition F_X à la variable aléatoire Y de fonction de répartition F_Y si et seulement si $V(X) \geq V(Y)$, où, lorsque les variables sont à support fini, la fonctionnelle V est donnée par :

$$\begin{aligned}
 V(X) = & u(x_1) + \varphi\left(\sum_{i=2}^n p_i\right)[u(x_2) - u(x_1)] + \cdots + \\
 & \varphi\left(\sum_{i=j+1}^n p_i\right)[u(x_{j+1}) - u(x_j)] + \cdots + \varphi(p_n)[u(x_n) - u(x_{n-1})] \quad (3)
 \end{aligned}$$

Cette formulation s'interprète aisément. Le décideur commence son évaluation par l'utilité minimale qu'il est sûr de recevoir, $u(x_1)$, et pondère les accroissements possibles de son utilité $u(x_j) - u(x_{j-1})$ par sa transformation (personnelle) $\varphi(v_j)$ de la probabilité v_j d'avoir au moins x_j ($v_j = \sum_{i=j}^n p_i$). Selon cette interprétation, un décideur ayant une fonction de transformation telle que $\varphi(p) \leq p$, sous-estimera tous les accroissements d'utilité qu'il peut obtenir. $V(X)$ est alors inférieure à l'espérance d'utilité de X (par rapport à la mesure de probabilité P). Pour cette raison, nous qualifierons un décideur tel que $\varphi(p) \leq p$ de *pessimiste dans le risque*.

Une expression équivalente à (3) s'écrit :

$$V(X) = \sum_{j=1}^{n-1} (\varphi(\sum_{i=j}^n p_i) - \varphi(\sum_{i=j+1}^n p_i)) u(x_j) + \varphi(p_n) u(x_n) \quad (4)$$

Pour illustrer le calcul de l'utilité dépendante du rang dans un cas simple, revenons sur notre exemple introductif et supposons que l'agent a une fonction de transformation des probabilités φ et une fonction d'utilité u . L'utilité associée par exemple à la décision d_α d'assurance partielle prend alors la forme suivante, étant donné que $w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L < w_0 - \pi(\alpha)$ dès que $\alpha < 1$:

$$\begin{aligned} V(d_\alpha) &= V(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L, p; w_0 - \pi(\alpha), 1 - p) \\ &= u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L) + \varphi(1 - p)(u(w_0 - \pi(\alpha)) - u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L)) \\ &= \varphi(1 - p)u(w_0 - \pi(\alpha)) + (1 - \varphi(1 - p))u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L) \end{aligned}$$

Dans le cas général, la fonctionnelle V s'écrit de la manière suivante¹⁸ :

$$\begin{aligned} V(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) d\varphi(P(X > x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) d\varphi(1 - F(x)) \\ &= \int_{-\infty}^0 [\varphi(P(u(X) > t)) - 1] dt + \int_0^{\infty} \varphi(P(u(X) > t)) dt . \end{aligned}$$

La formulation générale donnée se simplifie dans certains cas particuliers.

- Si la fonction de transformation φ est la fonction identité $\varphi(v) = v$, alors $V(X)$ est l'espérance d'utilité $E[u(X)]$ de la variable aléatoire. Ainsi, le modèle d'utilité dépendante du rang admet comme cas particulier le modèle d'espérance d'utilité.
- Yaari (1987) a développé indépendamment un modèle, connu sous le nom de *théorie duale*, qui s'avère être un modèle d'utilité dépendante du rang, dans lequel la fonction u est la fonction identité $u(x) = x$. Ce modèle possède le même nombre de "degrés de liberté" que le modèle de l'espérance d'utilité, tout deux requérant la spécification d'une seule

¹⁸Cette fonctionnelle s'avère être une intégrale de Choquet (Choquet (1954)), c'est-à-dire une intégration par rapport à une mesure non additive. Pour une interprétation graphique de cette intégrale, voir Gayant (1998).

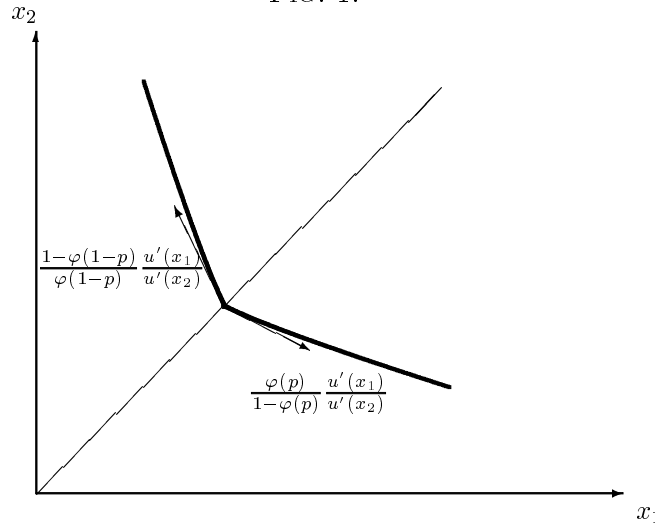
fonction (u dans le modèle d'espérance d'utilité, φ dans le modèle de Yaari), et pourtant permet de distinguer entre les différentes notions d'aversion pour le risque, ce que le modèle d'espérance d'utilité ne permet pas.

- Si à la fois la fonction de transformation et la fonction d'utilité sont la fonction identité, alors $V(X)$ est simplement la valeur espérée $E[X]$ de la variable aléatoire.

3.5.3 Interprétations graphiques

Nous proposons une interprétation graphique simple des courbes d'indifférence de la fonctionnelle RDEU dans le cas de deux états de la nature, s_1 (probabilité p) et s_2 (probabilité $(1-p)$). Notons $X = (x_1, p; x_2, 1-p)$ et évaluons $V(X)$. Si $x_1 \leq x_2$, alors, $V(X) = (1-\varphi(1-p))u(x_1) + \varphi(1-p)u(x_2)$. En revanche, si $x_2 \leq x_1$, $V(X) = \varphi(p)u(x_1) + (1-\varphi(p))u(x_2)$. Le long d'une courbe d'indifférence $V(X) = k$, le taux marginal de substitution (TMS) prend une expression différente selon que x_1 est plus grand ou plus petit que x_2 . Si $x_1 < x_2$, le TMS est égal à $\frac{1-\varphi(1-p)}{\varphi(1-p)} \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}$ alors que si $x_1 > x_2$, le TMS est égal à $\frac{\varphi(p)}{1-\varphi(p)} \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}$. Si u est concave, le TMS lorsque $x_1 < x_2$ est plus petit que le TMS lorsque $x_2 < x_1$ si et seulement si $\varphi(p) \leq p$. Ceci est illustré sur le graphique suivant. Comme on le voit sur le graphique, la courbe d'indifférence

FIG. 1:



présente un coude (“kink”) sur la première bissectrice. Cette caractéristique du modèle d'utilité dépendante du rang est celle qui la distingue du modèle d'espérance d'utilité et qui permettra des comportements non explicables dans ce dernier modèle. Ce coude renvoie à l'idée que l'aversion pour le risque a un impact d'ordre 1 dans le modèle d'utilité dépendante du rang alors qu'elle a

un impact d'ordre 2 dans le modèle d'espérance d'utilité (voir Segal et Spivak (1990) et Langlais (1996)). Cette non-différentiabilité reflète le fait que, localement (c'est-à-dire pour de petits risques), il n'est pas possible d'approximer le comportement d'un tel décideur par le comportement d'un décideur neutre vis-à-vis du risque, comme cela est le cas dans le modèle d'espérance d'utilité.

Dans l'exemple de l'assurance, $X = d_\alpha = (x_1, p; x_2, 1 - p) = (w_0 - L - \pi(\alpha) + \alpha L, p; w_0 - \pi(\alpha), 1 - p)$. Le cas $x_1 > x_2$ correspond alors à de la sur-assurance ($\alpha > 1$), tandis que le cas $x_1 < x_2$ correspond à de l'assurance partielle. Les points sur la première bissectrice correspondent à de l'assurance complète : $\alpha = 1$.

3.5.4 Diversité des notions d'aversion pour le risque et leur caractérisation

Comme Machina (1982a), (1982b) l'avait déjà remarqué, l'équivalence entre aversion faible et aversion forte pour le risque dans le modèle d'espérance d'utilité ne s'étend pas à des modèles plus généraux (voir Cohen (1995)). En effet, dans le modèle d'utilité dépendante du rang, les deux notions d'aversion pour le risque que nous avons présentées entraînent des conditions différentes sur les fonctions u et φ caractérisant un décideur.

Théorème 3 (Chew, Karni, et Safra (1987)) *Soit un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'utilité dépendante du rang et caractérisé par des fonctions u et φ dérivables. Le décideur a de l'aversion forte pour le risque si et seulement si φ est convexe et u est concave.*

Cette caractérisation élégante de l'aversion forte ne permet toutefois pas de séparer l'attitude vis-à-vis du risque de celle vis-à-vis de la richesse : un décideur ayant de l'aversion forte a nécessairement une utilité marginale de la richesse décroissante (ou constante, voir Yaari (1987)). Etudions maintenant le cas de l'aversion faible.

Proposition 3 (Quiggin (1982), Yaari (1987), Roell (1987)) *Supposons u dérivable et concave. Alors, le décideur a de l'aversion faible pour le risque si et seulement si pour tout $p \in [0, 1]$, $\varphi(p) \leq p$.*

Ce résultat donne une condition nécessaire et suffisante de l'aversion faible uniquement si l'on suppose la concavité de la fonction u . Toutefois, il est possible de rompre le lien entre aversion pour le risque et utilité marginale décroissante, mais, dans ce cas, seule une condition suffisante est connue.

Proposition 4 (Chateauneuf et Cohen (1994)) *Soit un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'utilité dépendante du rang et caractérisé par u et φ dérivables et telles qu'il existe $k \geq 1$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

$$(i) \quad u'(x) \leq k \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \text{ pour tout } 0 \leq y < x \leq 1$$

$$(ii) \quad \varphi(p) \leq p^k \text{ pour tout } p \in [0, 1],$$

alors, ce décideur a de l'aversion faible pour le risque.

Interprétons cette proposition. Lorsque $k = 1$, la condition (i) est équivalente à la concavité de u . En revanche, si $k > 1$, le décideur peut avoir une fonction u convexe. Plus k est grand, plus la convexité de u est forte. La proposition s'interprète alors de la manière suivante : un décideur ayant de l'aversion faible peut avoir une fonction u convexe, mais, dans ce cas, son degré de convexité doit être "compensé" par un plus grand pessimisme, c'est-à-dire $\varphi(p)$ de plus en plus petit par rapport à p .

Cette proposition se transpose facilement à un décideur ayant du goût faible pour le risque. Un décideur ayant du goût faible pour le risque peut ainsi avoir une utilité marginale décroissante s'il est suffisamment "optimiste".

Enfin, l'étude des comportements dans le modèle d'utilité dépendant du rang a permis une nouvelle caractérisation de l'accroissement de risque au sens de la dominance seconde.

Proposition 5 (*Yaari (1984), Chateauneuf (1991)*) Soient X et Y deux variables aléatoires de même espérance. Y est un étalement à moyenne constante de X si et seulement si pour toute fonction φ croissante convexe de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x d\varphi(1 - F_X(x)) \geq -\int_{-\infty}^{\infty} x d\varphi(1 - F_Y(x))$$

Cette proposition peut en effet s'interpréter de la manière suivante : Y est un étalement à moyenne constante (ou constitue un accroissement du risque au sens de la dominance seconde) de X si et seulement si tous les décideurs se conformant au modèle d'utilité dépendante du rang avec $u(x) = x$ et φ convexe préfèrent X à Y .

Remarque 8 Dès que u est deux fois continuellement dérivable et $u'(x) \neq 0$, $-u''(x)/u'(x)$ est toujours défini quel que soit x , mais ne représente plus le coefficient absolu d'aversion pour le risque.

3.6 Méthodes expérimentales d'évaluation des paramètres d'un modèle

Quel que soit le modèle de décision utilisé, l'évaluation des paramètres de la fonction représentant les préférences du décideur revêt une grande importance, par exemple, dans une perspective d'aide à la décision. La démarche à adopter est la suivante. Il convient tout d'abord de se placer dans le modèle le plus général possible et de tester le modèle de décision choisi à l'intérieur de ce cadre général. Puis, une fois le modèle le plus adéquat sélectionné, on peut estimer, pour chaque décideur, les paramètres qui caractérisent son comportement. En effet, les incohérences dans l'estimation d'un paramètre d'un modèle révèlent parfois la non-adéquation des comportements à ce modèle. A la suite de Allais (1953), McCord et de Neufville (1984), cherchant à estimer la fonction d'utilité d'un décideur dans le modèle d'espérance d'utilité, ont mis en évidence des

biais systématiques dans leurs estimations (la fonction d'utilité était d'autant plus concave que la probabilité utilisée pour la construire était grande), qui les ont conduit à rejeter le modèle d'espérance d'utilité pour un tel décideur.

Il existe de nombreuses études expérimentales permettant de tester les modèles de décision les uns par rapport aux autres en tenant compte d'un arbitrage entre adéquation et parcimonie et/ou d'estimer, pour chaque décideur, les différentes fonctions qui le caractérisent dans le modèle utilisé. Citons par exemple Kahneman et Tversky (1979), Cohen et Jaffray (1988), Hey et Orme (1994), Harless et Camerer (1994), Wakker et Deneffe (1996), Abdellaoui (1995), Abdellaoui et Munier (1998), Wu et Gonzalez (1996), Prelec (1998).

4 Décision dans l'incertain

Nous nous plaçons maintenant dans une situation où le décideur ne connaît pas la loi de probabilité sur l'ensemble S des états de la nature, ce qui est le cas dans la plupart des situations économiques. Nous devons désormais travailler avec l'ensemble \mathfrak{X} des applications mesurables de (S, \mathcal{A}) dans \mathfrak{C} muni d'une relation de préférence notée \succsim .

L'approche classique, dite bayésienne, consiste à réduire un problème de décision dans l'incertain à un problème de décision dans le risque. Cette réduction est remise en cause par les modèles non additifs.

4.1 Approche bayésienne : le modèle d'espérance subjective d'utilité

Cette approche est celle de Savage (1954) (voir également Fishburn (1982)). Outre l'axiome de préordre total, la construction de ce modèle repose essentiellement sur l'axiome de la chose sûre ("Sure Thing Principle").

Axiome 5 (*Principe de la chose sûre*) Soit A une partie de S . Soient X, X', Y et Y' des éléments de \mathfrak{X} vérifiant : $\forall s \in A, X(s) = X'(s), Y(s) = Y'(s)$ et $\forall s \in \overline{A}, X(s) = Y(s), X'(s) = Y'(s)$ Alors,

$$X \succsim Y \iff X' \succsim Y'$$

Intuitivement, cet axiome exprime qu'une modification commune de la partie commune de deux décisions ne change pas la préférence entre ces deux décisions. Le théorème de représentation de Savage s'exprime alors de la manière suivante. Imposer l'axiome de préordre total, le principe de la chose sûre, plus un certain nombre d'axiomes essentiellement techniques, mais dont la justification peut reposer sur des hypothèses implicites assez fortes¹⁹ (voir Savage (1954), Fishburn (1982)), implique *à la fois*

¹⁹A titre d'exemple, il est supposé que l'utilité ne dépend pas de l'état de la nature, voir Karni (1996).

- l’existence d’une probabilité P (dite subjective) sur (S, \mathcal{A}) , définie de manière unique,
- l’existence d’une fonction d’utilité²⁰ u de l’ensemble des conséquences $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, continue et croissante,
- et que la fonctionnelle, U , représentant les préférences, c’est-à-dire telle que $X \succsim Y \iff U(X) \geq U(Y)$, est donnée par l’espérance mathématique, $E_P u(X)$, pour la probabilité P de l’utilité des résultats.

Dans le cas où S est fini, $E_P u(X) = \sum_{i=1}^n P(s_i)u(X(s_i))$, et lorsque S est quelconque, $E_P u(X) = \int_S u(X(s))dP(s)$. Ce modèle est dit *additif* puisqu’il implique l’existence d’une mesure “additive” sur les événements. De plus, comme dans le modèle d’espérance d’utilité dans le risque, il est qualifié de modèle linéaire, puisqu’il se caractérise par le traitement linéaire des probabilités. Ce résultat est très puissant : accepter l’axiomatique de Savage supprime la question du critère de choix dans l’incertain : tout problème de choix dans l’incertain se réduit à un problème de choix dans le risque. Toutefois, aussi bien pour des raisons théoriques que pour des raisons pratiques (expérimentales et opérationnelles), ce modèle Bayésien ne fait pas l’unanimité ; en particulier, il ne rend pas bien compte de certains comportements réels des individus, comme nous allons le voir dans la section suivante.

4.2 Problèmes soulevés par le modèle d’espérance subjective d’utilité

Ellsberg, dans un article célèbre (Ellsberg (1961)) exhibe, dans des situations d’incertain, des comportements en contradiction forte avec ce modèle.

4.2.1 Le “paradoxe” d’Ellsberg

Ellsberg propose à des sujets la situation suivante : une urne contient 90 boules, dont 30 sont rouges (R) et dont 60 sont bleues (B) ou jaunes (J), en proportion inconnue. Il peut donc y avoir de 0 à 60 boules bleues et le complémentaire de boules jaunes. On doit tirer une boule (au hasard) dans l’urne et on demande aux sujets de choisir entre les deux décisions suivantes : parier sur (R) (décision d_1) ou parier sur (B) (décision d_2), puis, indépendamment, de choisir entre les décisions suivantes : parier sur $(R \cup J)$ (décision d_3) ou parier sur $(B \cup J)$ (décision d_4). Le tableau suivant donne plus précisément les résultats de chacune des décisions :

²⁰ La fonction d’utilité u est définie à une fonction affine croissante près.

	<i>Rouge</i>	<i>Bleue</i>	<i>Jaune</i>	
d_1	100	0	0	
d_2	0	100	0	(5)
d_3	100	0	100	
d_4	0	100	100	

La plupart des sujets font les choix suivants²¹ : $d_1 \succ d_2$ et $d_4 \succ d_3$. Ces choix entraînent une violation du principe de la chose sûre. En effet, pour un sujet qui préfère d_1 à d_2 , changer, pour l'évènement (J), leur valeur commune 0 en valeur commune 100 ne devrait pas changer les choix, c'est-à-dire devrait conduire à $d_3 \succ d_4$. Les sujets choisissant $d_1 \succ d_2$ et $d_4 \succ d_3$ se conduisent donc en contradiction avec le principe de la chose sûre. Il y a aussi contradiction avec l'existence d'une probabilité subjective : $d_1 \succ d_2$ implique $P(R) > P(B)$, tandis que $d_4 \succ d_3$ implique $P(B \cup J) > P(R \cup J)$, c'est-à-dire $P(B) + P(J) > P(R) + P(J)$, d'où la contradiction.

Si, dans une situation aussi simple, les sujets se comportent en contradiction avec le modèle d'espérance subjective d'utilité, il peut sembler héroïque de croire que les agents, dans des situations économiques complexes, arrivent à attribuer une probabilité aux évènements incertains !

4.2.2 Aversion pour l'ambiguïté

Les comportements observés dans l'expérience d'Ellsberg sont facilement explicables. Dans l'expérience d'Ellsberg, les sujets doivent d'abord choisir entre (d_1) parier sur un évènement de probabilité connue égale à $1/3$ et (d_2) parier sur un évènement de probabilité inconnue comprise entre 0 et $2/3$. Ils doivent ensuite choisir entre (d_3) parier sur un évènement de probabilité inconnue comprise entre $1/3$ et 1 et (d_4) parier sur un évènement de probabilité connue égale à $2/3$. Dans les deux cas, ils préfèrent parier sur l'évènement "non ambigu" (c'est-à-dire de probabilité connue), manifestant ainsi de l'aversion pour l'ambiguïté. Plus généralement, on dira qu'un agent a de l'aversion pour l'ambiguïté s'il préfère parier pour un même montant sur un évènement de probabilité P connue plutôt que sur un évènement de probabilité inconnue comprise entre $P - \varepsilon$ et $P + \varepsilon$.

Il n'existe pas à ce jour d'autre définition de la notion d'ambiguïté, indépendante de tout modèle. On peut toutefois remarquer qu'un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance subjective d'utilité est indifférent entre les deux paris décrits ci-dessus et en ce sens il est *neutre vis-à-vis de l'ambiguïté*. Il n'existe pas de consensus dans la littérature sur la manière de définir plus

²¹Cette expérience a été souvent renouvelée, avec des sujets d'horizons très variés, avec une très grande robustesse des résultats. La proportion des sujets faisant ce choix est en général comprise entre 60% et 70%.

généralement l'aversion pour l'incertain ; la terminologie elle même n'est pas encore véritablement fixée et dépend des auteurs et des modèles qu'ils utilisent. C'est pourquoi nous ne développerons ces notions qu'après avoir exposé les différents modèles utilisés (voir la section 4.3.6).

Ce manque de consensus provient du fait qu'il est difficile de définir la notion de "plus incertain que", qui correspondrait à la notion de "plus risqué que" à moyenne constante, puisque, dans l'incertain, la notion de moyenne n'a pas de sens.

4.3 Le modèle d'utilité "à la Choquet"

Schmeidler (1989) est à l'origine²² du modèle connu maintenant sous le nom d'utilité à la Choquet (*CEU* pour *Choquet Expected Utility*). L'idée de base de ce modèle est d'affaiblir le principe de la chose sûre de manière à pouvoir modéliser les comportements observés dans l'expérience d'Ellsberg. Cet axiome va être remplacé par le *principe de la chose sûre comonotone*.

4.3.1 Le principe de la chose sûre comonotone

Le principe de la chose sûre comonotone que nous introduisons maintenant ne s'applique qu'à des actes X et Y comonotones, et qui le restent après modification de la valeur commune, ce qui exclut tout phénomène de "couverture" : il est donc plus faible que le principe de la chose sûre de la théorie de Savage.

Axiome 6 Soient $(A_k)_{k=1}^n$ une partition de S , $X = (x_1, A_1; \dots; x_k, A_k; \dots; x_n, A_n)$ et $Y = (y_1, A_1; \dots; y_k, A_k; \dots; y_n, A_n)$ deux éléments de \mathfrak{X} où $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq \dots \leq y_k \leq \dots \leq y_n$ et $x_{k_0} = y_{k_0}$ pour un certain k_0 . Soient X' et Y' les deux éléments de \mathfrak{X} obtenus en remplaçant cette valeur commune de X et de Y par n'importe quelle autre valeur commune qui garde la même place dans les suites croissantes des x_k et y_k . Alors,

$$X \succsim Y \iff X' \succsim Y'$$

Pour saisir la signification de cet axiome, reportons nous à l'expérience d'Ellsberg (résumée dans le tableau (5)). Nous constatons en effet que les passages des décisions d_1 et d_2 aux décisions d_3 et d_4 implique le changement de la valeur commune 0 en 100 si la boule est jaune. Cette valeur commune était la plus faible dans les décisions d_1 et d_2 et devient la plus élevée dans les décisions d_3 et d_4 . Le rang de la valeur commune n'est donc pas préservé par ce changement, et le principe de la chose sûre comonotone n'implique aucune restriction sur les choix possibles dans ce cas précis. Le choix observé (d_1 et d_4), en contradiction avec le principe de la chose sûre, est donc compatible avec le principe de la chose sûre comonotone.

²²La première version date de 1982.

4.3.2 La notion de capacité

Avant de donner le théorème de représentation du modèle d'utilité à la Choquet, il nous faut définir la notion de capacité. Une *capacité* v est une fonction d'ensemble de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ satisfaisant aux conditions suivantes : $v(\emptyset) = 0$, $v(S) = 1$, et telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies v(A) \leq v(B)$$

Une capacité est *convexe* si, de plus,

$$v(A) + v(B) \leq v(A \cup B) + v(A \cap B) \quad (6)$$

La conjuguée \bar{v} de v est définie par $\bar{v}(A) = 1 - v(\bar{A})$. Le *noyau* de v , noté $core(v)$ est défini par :

$$core(v) = \{P \text{ probabilité additive sur } (S, \mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq v(A)\} \quad (7)$$

Lorsque la capacité est convexe, son noyau est non vide. Enfin, une mesure de probabilité est un cas particulier d'une capacité. Son noyau est alors réduit à un élément, la loi de probabilité elle-même.

Le noyau représente l'ensemble des lois de probabilité compatibles avec une information non-probabiliste, du type "la probabilité de l'événement A est *au moins* $v(A)$ ". Intuitivement, un décideur très pessimiste et ne sachant pas quelle est la vraie loi de probabilité parmi celles appartenant au noyau, affectera à chaque événement la "croyance" v égale au minimum de toutes les probabilités de cet événement pour ces lois.

4.3.3 Représentation des préférences et intégrale de Choquet

Le théorème de représentation s'exprime alors ainsi : imposer certains axiomes (préordre total, principe de la chose sûre comonotone, plus un certain nombre d'axiomes techniques²³), implique l'existence à la fois d'une capacité v définie de manière unique sur (S, \mathcal{A}) et d'une fonction d'utilité²⁴ u de l'ensemble des conséquences \mathcal{C} (sous-ensemble de \mathbb{R}), continue et croissante telles que la fonctionnelle V représentant les préférences dans \mathfrak{X} soit *l'intégrale de Choquet* pour cette capacité v de l'utilité des résultats.

L'écriture et l'interprétation de l'intégrale de Choquet sont relativement simples lorsque les variables considérées sont à support fini, $X = (x_1, A_1; \dots; x_n, A_n)$ où les A_i forment une partition de S et $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_n$:

$$\int_{Ch} u(X) dv = \sum_{i=1}^n u(x_i) [v(\cup_{j=i}^n A_j) - v(\cup_{j=i+1}^n A_j)] \quad (8)$$

²³ Voir Gilboa (1987), Chew et Wakker (1996), Sarin et Wakker (1992).

²⁴ La fonction d'utilité u est définie à une fonction affine croissante près.

où le symbole Ch signale que l'intégration se fait par rapport à une mesure non additive. Cette fonctionnelle s'appelle l'utilité à la Choquet. Lorsque v est additive $v(\cup_{j=i}^n A_j) - v(\cup_{j=i+1}^n A_j) = v(A_i)$ et on reconnaît l'espérance de l'utilité de X .

L'expression (8) peut aussi se réécrire :

$$u(x_1) + \sum_{i=2}^n [u(x_i) - u(x_{i-1})]v(\cup_{j=i}^n A_j)$$

Sous cette forme, une interprétation de la formule est que le décideur calcule l'utilité à la Choquet en prenant la valeur minimale $u(x_1)$ et en y ajoutant les incréments d'utilité $(u(x_i) - u(x_{i-1}))$ pondérés par la croyance (subjective) de leur occurrence $v(\cup_{j=i}^n A_j)$.

Pour illustrer le calcul de l'utilité à la Choquet dans un cas simple, reprenons notre exemple introductif et supposons que l'agent a une fonction d'utilité u et une capacité v qui mesure ses croyances, avec $v(s_1) + v(s_2) < 1$. Cette condition révèle de l'"aversion pour l'incertitude" (voir paragraphe 4.3.6). L'utilité associée par exemple à la décision d_α d'assurance partielle prend alors la forme suivante, étant donné que $w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L < w_0 - \pi(\alpha)$ dès que $\alpha < 1$:

$$\begin{aligned} V(d_\alpha) &= u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L) + v(s_1)(u(w_0 - \pi(\alpha)) - u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L)) \\ &= v(s_1)u(w_0 - \pi(\alpha)) + (1 - v(s_1))u(w_0 - \pi(\alpha) - L + \alpha L) \end{aligned}$$

Dans le cas infini, l'intégrale de Choquet est définie par :

$$V(X) = \int_{Ch} u(X)dv = \int_{-\infty}^0 [v(u(X) > t) - 1] dt + \int_0^{\infty} v(u(X) > t)dt$$

Exemple 1 Soit $S = \{s_1, s_2\}$ et la capacité v définie sur 2^S . Considérons les deux actes suivants : $H = (10, s_1; -100, s_2)$ et $B = (10 - \varepsilon, s_1; 10 - \varepsilon, s_2)$ et supposons u linéaire. L'intégrale de Choquet de h par rapport à la capacité v est donnée par $V(H) = -100 + (100 + 10)v(s_1) = -100(1 - v(s_1)) + 10v(s_1)$. L'intégrale de Choquet d'un acte constant étant égale à cette constante, $V(B) = 10 - \varepsilon$.

Remarque 9 Il est possible de démontrer que, lorsque la capacité v est convexe, l'inégalité suivante est vraie pour tout $X \in \mathfrak{X}$:

$$\int_{Ch} X dv \leq - \int_{Ch} (-X) dv \quad (9)$$

Cette inégalité souligne que l'intégrale de Choquet n'est pas un opérateur linéaire (voir la section 5.2 pour une interprétation économique de cette inégalité).

4.3.4 Modèle d'utilité dépendante du rang et modèle d'utilité à la Choquet

Les expressions (3) du modèle d'utilité dépendante du rang et (8) du modèle d'utilité à la Choquet sont très proches. On peut montrer que :

1. formellement, dans l'expression (3), $\varphi \circ P$ est une capacité et la fonctionnelle RDEU est une intégrale de Choquet par rapport à cette capacité. On comprend mieux alors que l'interprétation que nous donnons ici de l'utilité à la Choquet soit identique à celle développée pour le modèle d'utilité dépendante du rang ;
2. inversement, si dans le modèle d'utilité à la Choquet, il existe une probabilité objective P sur (S, \mathcal{A}) et si les préférences respectent un axiome de dominance stochastique d'ordre un²⁵, alors il existe une loi de probabilité P telle que la capacité v peut s'écrire $v = \varphi \circ P$, où φ est unique. Dans ce cas, v est convexe si et seulement si φ est convexe (voir Wakker (1990b)).

4.3.5 Le modèle de Schmeidler

Lorsque nous nous plaçons dans un cadre à la Anscombe et Aumann (1963), c'est-à-dire dans un cadre où l'ensemble des conséquences est un ensemble \mathfrak{L}_0 de lois à support fini sur un sous-ensemble de \mathbb{R} , l'axiome central de cette théorie prend une forme beaucoup plus intuitive. C'est pourquoi nous revenons ici à l'article pionnier de Schmeidler (1989) qui utilise ce cadre. La structure ainsi imposée simplifie un peu l'axiomatique. Le mixage des lois ayant maintenant un sens, on peut ainsi remplacer le principe de la chose sûre comonotone par l'axiome d'indépendance comonotone, restriction de l'axiome d'indépendance aux variables aléatoires deux à deux comonotones :

Axiome 7 (Indépendance comonotone) Pour tout X, Y, Z de \mathfrak{F}_0 , deux à deux comonotones et $\alpha \in [0, 1]$ ²⁶

$$X \succsim Y \implies \alpha X \oplus (1 - \alpha)Z \succsim \alpha Y \oplus (1 - \alpha)Z$$

Schmeidler dérive alors un théorème de représentation aboutissant également à l'utilité à la Choquet. Toutefois, dans ce cas, les conséquences sont des lois à support fini et non pas des nombres réels, ce qui rend l'interprétation de l'intégrale de Choquet un peu plus délicate.

²⁵Pour tout $A \in \mathcal{A}$, définissant X_A par $X_A(s) = 1$ si $s \in A$, $X_A(s) = 0$ sinon, cet axiome s'énonce de la manière suivante : si $P(A) \geq P(B)$ alors $X_A \succsim X_B$.

²⁶ $\alpha X \oplus (1 - \alpha)Z$ est l'élément de \mathfrak{F}_0 défini par : pour tout $s \in S$, $\alpha X(s) \oplus (1 - \alpha)Z(s)$ est le α -mixage des deux lois $X(s)$ et $Z(s)$.

4.3.6 Pessimisme, aversion pour l'incertain et aversion pour l'ambiguïté

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 4.2.2, le problème de la définition de l'aversion pour l'incertain reste entier, la terminologie elle-même n'étant d'ailleurs pas fixée. C'est pourquoi nous ne faisons que donner ici des définitions telles qu'elles ont été proposées dans le cadre de différents modèles.

- Une première définition de l'*aversion pour l'incertain*, proposée par Schmeidler (1989), est la convexité des préférences. La convexité des préférences est définie par : pour tout X, Y à valeur dans \mathcal{L}_0 , et $\alpha \in [0, 1]$ $X \sim Y \implies \alpha X \oplus (1 - \alpha)Y \succsim Y$. L'intuition derrière cette définition de l'aversion pour l'incertain est que le décideur préfère "lisser" sa distribution de richesse. Cet axiome peut se concevoir comme exprimant de la préférence pour la diversification : mixer deux décisions incertaines, indifférentes entre elles, réduit "l'ambiguïté" qui leur est attachée et est donc préféré par le décideur. Schmeidler (1989) démontre alors que, dans son modèle, lorsque u est linéaire, l'aversion pour l'incertitude est équivalente à la convexité de la capacité.
- Wakker (1990a) part du modèle de Schmeidler (1989) et définit la notion d'*indépendance pessimiste*²⁷ et l'axiome du même nom : Pour tout X, Y, Z de \mathfrak{F}_0 , tels que Y et Z sont comonotones et $\alpha \in [0, 1]$

$$X \succsim Y \implies \alpha X \oplus (1 - \alpha)Z \succsim \alpha Y \oplus (1 - \alpha)Z$$

L'intuition sous-jacente est la suivante : les décisions Y et Z étant comonotones, elles ne peuvent pas être utilisées à des fins de couverture l'une contre l'autre. En revanche, X et Z ne sont pas nécessairement comonotones (comme elles l'étaient dans l'axiome d'indépendance comonotone), et peuvent donc être utilisées à des fins de couverture. Ainsi, la réduction de l'incertitude par le phénomène de couverture conduit un pessimiste à "surévaluer" la décision combinant X et Z par rapport à celle combinant Y et Z . En adoptant cet axiome et dans le cadre du modèle d'utilité à la Choquet, Wakker (1990a) retrouve le résultat de Schmeidler (1989) et montre qu'un décideur ayant une fonction d'utilité u linéaire est pessimiste (c'est-à-dire satisfait en plus à l'axiome d'indépendance pessimiste) si et seulement si il a une capacité v convexe.

- En se plaçant d'emblée dans le modèle d'utilité à la Choquet, Montesano et Giovannoni (1996) définissent deux notions d'aversion pour l'incertitude. Dans ce cadre, un décideur caractérisé par u et ν , a de l'*aversion pour l'incertitude* s'il existe une loi de probabilité P telle que pour toute décision $X \in \mathfrak{X}$, $\int_{Ch} u(X) d\nu \leq E_P u(X)$. Ils démontrent que cette notion d'aversion pour l'incertitude est équivalente au fait que la capacité a un

²⁷ Traduction littérale de *pessimism-independence*.

noyau non vide. La seconde notion qu'ils définissent est celle d'*aversion pour un accroissement de l'incertitude*. Cette notion est équivalente à la convexité de la capacité.

- Chateauneuf et Tallon (1998) définissent plusieurs notions de *préférence pour la diversification* (voir également Dekel (1989)). La première s'avère être équivalente à la convexité des préférences. Ils montrent que cette notion de préférence pour la diversification est équivalente, pour un décideur à la Choquet, à la convexité de v et à la concavité de u , généralisant en cela le résultat de Schmeidler (1989). La seconde notion est celle de *préférence pour la diversification certaine* : si une combinaison d'actes, indifférents entre eux, donne un acte certain, alors cet acte certain est préféré à tous les actes initiaux. Ils montrent que cette notion implique, dans le modèle d'utilité à la Choquet, la non-vacuité du noyau de la capacité, et que la réciproque est vraie lorsque u est concave.
- Ghirardato et Marinacci (1997) proposent une définition de l'aversion pour l'ambiguïté pour un décideur ayant une fonctionnelle de préférences d'un type donné, V . Leur définition se fait en deux temps. Ils donnent d'abord la définition suivante : un décideur 1 a *plus d'aversion pour l'ambiguïté* qu'un décideur 2, si $V_1(X) \leq V_2(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$ où V_i représente les préférences du décideur i . Dans une deuxième étape, un décideur est supposé avoir de *l'aversion pour l'ambiguïté* s'il existe un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité qui a moins d'aversion pour l'ambiguïté que lui²⁸. Ils montrent alors qu'un décideur à la Choquet a de l'aversion pour l'ambiguïté si et seulement si le noyau de sa capacité est non vide.
- ? définit la relation qu'il appelle *plus d'aversion pour l'incertain que* de la même manière que Ghirardato et Marinacci (1997) définissent "plus d'aversion pour l'ambiguïté que". En revanche, il dit qu'un décideur a de *l'aversion pour l'incertain* s'il existe un décideur "*probabilistiquement sophistiqué*"²⁹ (c'est-à-dire dont le comportement révèle qu'il assigne une unique loi de probabilité aux événements) qui ait moins d'aversion pour l'incertitude que lui.
- On peut aussi trouver dans la littérature les définitions d'autres notions : de *pessimisme* (Arrow et Hurwicz (1972), Cohen, Jaffray, et Said (1987)), d'*aversion pour l'incertain* (Chateauneuf (1994)), d'*aversion pour l'ambiguïté* (Fishburn (1993)), ou encore de *préférence pour la "randomisation"* (Eichberger et Kelsey (1996)).

²⁸Pour une définition plus rigoureuse, nous renvoyons le lecteur à Ghirardato et Marinacci (1997).

²⁹Nous traduisons ainsi littéralement le terme de *probabilistically sophisticated* du à Machina et Schmeidler (1992). Ce terme est utilisé pour un décideur qui assigne des probabilités objectives ou subjectives à tous les événements, mais qui ne les traite pas nécessairement de manière linéaire. Par exemple, des décideurs satisfaisant aux axiomes du modèle d'espérance d'utilité ou d'utilité dépendante du rang sont *probabilistically sophisticated*.

Remarque 10 Il est intéressant de remarquer que les contributions mentionnées ci-dessus diffèrent aussi par leur traitement de l’aversion pour le risque. Ainsi, les définitions reposant sur la convexité des préférences (Schmeidler (1989), Chateauneuf et Tallon (1998)) capturent une aversion “globale” vis-à-vis de l’incertitude qu’elle soit probabilisée ou non. En revanche, pour Ghirardato et Marinacci (1997) la fonction u capture l’aversion pour le risque, tandis que la capacité v capture l’aversion pour l’ambiguïté. Ils peuvent ainsi modéliser un décideur qui serait neutre vis-à-vis du risque (u linéaire) mais qui aurait de l’aversion pour l’ambiguïté (noyau non vide). Cohen, Jaffray, et Said (1987) ont vérifié à l’aide de tests expérimentaux l’indépendance de l’attitude des sujets vis-à-vis du risque et de leur attitude vis-à-vis de l’ambiguïté. En particulier, un décideur peut à la fois avoir du goût pour le risque et du pessimisme (ou l’aversion pour l’ambiguïté).

4.4 Le modèle *multi-prior*

Nous abordons maintenant le modèle “max-min” de Gilboa et Schmeidler (1989). Dans ce modèle, les agents ont un ensemble de lois de probabilité *a priori* (et non une seule comme dans le cadre Bayésien) et utilisent le critère de maximin pour évaluer les décisions par rapport à cet ensemble de croyances initiales (*multiple priors*).

4.4.1 L’axiomatique du modèle

Gilboa et Schmeidler (1989) se placent dans un cadre à la Anscombe et Aumann (1963), où l’ensemble des conséquences est un ensemble de lois à support fini. L’axiomatique est alors très simple et repose essentiellement sur les deux axiomes suivants. Le premier est l’axiome d’*indépendance certaine* :

Axiome 8 *Pour tout X, Y de \mathfrak{F}_0 et Z décision constante de \mathfrak{F}_0 , pour tout $\alpha \in]0, 1[$*

$$X \succ Y \implies \alpha X \oplus (1 - \alpha)Z \succ \alpha Y \oplus (1 - \alpha)Z$$

Cet axiome est plus faible que l’axiome d’indépendance habituel en ce qu’il ne s’applique que lorsqu’on rajoute une “conséquence commune” qui est un acte constant. Cet axiome est impliqué par l’axiome d’indépendance comonotone (axiome 7). Le second axiome est celui d’*aversion pour l’incertitude* déjà rencontré dans le modèle de Schmeidler (1989) :

Axiome 9 *Pour tout X, Y de \mathfrak{F}_0 et $\alpha \in]0, 1[$*

$$X \sim Y \implies \alpha X \oplus (1 - \alpha)Y \succeq X$$

Proposition 6 (*Gilboa et Schmeidler (1989)*) *Sous l’axiome de préordre total (axiome 1), un axiome de monotonie, un axiome de continuité et les axiomes*

8 et 9, il existe un ensemble de mesure de probabilité \mathcal{P} , fermé et convexe, et une fonction d'utilité $u : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$X \succeq Y \iff \min_{P \in \mathcal{P}} \int u(X) dP \geq \min_{P \in \mathcal{P}} \int u(Y) dP$$

La fonction u est unique à une transformation affine près, tandis que l'ensemble \mathcal{P} est unique sous un axiome supplémentaire de non-trivialité.

L'interprétation de cette représentation est particulièrement simple. Le décideur agit comme s'il avait un ensemble de croyances a priori (au lieu d'une seule comme dans le modèle d'espérance d'utilité). Pour évaluer l'utilité d'un acte, il calcule l'espérance de l'utilité de cet acte pour toutes les probabilités qu'il considère, et en prend le minimum. Cette dernière opération correspond bien à une idée de pessimisme ou d'aversion pour l'incertitude. Remarquons que par construction, ce modèle ne peut rendre compte que de comportements pessimistes et pas de comportements "optimistes" ou mixtes.

4.4.2 Modèle *multi-prior* et modèle d'utilité à la Choquet

Le modèle *multi-prior* est étroitement relié au modèle d'utilité à la Choquet. Grâce à ce modèle, il est possible d'interpréter la capacité de Choquet en termes de croyance. En effet, Schmeidler (1986) a démontré l'équivalence suivante :

$$v \text{ est convexe} \iff \begin{cases} \text{core}(v) \neq \emptyset \text{ et} \\ \int_{Ch} u(X) dv = \min_{P \in \text{core}(v)} \int u(X) dP \text{ pour tout } X \in \mathfrak{X} \end{cases}$$

Lorsque la capacité du décideur est convexe, celui-ci se comporte comme un décideur à la *multi-prior* dont l'ensemble de mesure de probabilité est donné par le noyau de la capacité. Le modèle *multi-prior* permet de donner un fondement "objectif" à la capacité (subjective) du modèle d'utilité à la Choquet ; capacité qui représente alors l'enveloppe inférieure de la famille de mesures de probabilité du modèle *multi-prior*. Toutefois, il convient de noter que tout ensemble fermé et convexe de lois de probabilité n'est pas nécessairement le noyau d'une capacité convexe, et donc que le modèle *multi-prior* n'est pas un cas particulier du cas d'utilité à la Choquet avec capacité convexe. Par ailleurs, les comportements décrits par une intégrale de Choquet par rapport à une capacité non convexe ne peuvent pas être décrits dans le modèle *multi-prior*.

Remarque 11 Le comportement d'un décideur de type *multi-prior* peut sembler excessivement pessimiste. Jaffray et Philippe (1997) ont montré qu'il était possible d'écrire l'intégrale de Choquet par rapport à une capacité v quelconque comme étant une combinaison linéaire de deux termes, l'un étant un minimum d'espérance d'utilité par rapport à une famille de lois de probabilité (comme dans le modèle *multi-prior*), l'autre en étant le maximum, la pondération entre les deux représentant un indice de pessimisme.

4.5 Quelques observations complémentaires

4.5.1 Information subjective versus information objective

Les modèles de décision dans l'incertain que nous avons exposés jusqu'à présent sont tous subjectifs, en ce sens que l'information sur les événements, qu'elle soit de type probabiliste ou non, est révélée par les choix des décideurs³⁰. Dans cette lignée, Epstein et Zhang (1998) donnent une manière axiomatique de discriminer entre les événements "non-ambigus", c'est-à-dire sur lesquels le décideur a une distribution de probabilité, et les événements "ambigus", non-probabilisables. Klibanoff (1998) quant à lui donne des axiomes de comportement qui révèlent que l'espace des états de la nature est le produit d'un espace probabilisé et d'un espace non-probabilisé.

Un autre type de modélisation est d'utiliser directement l'information objective dont pourrait disposer le décideur. Sans chercher à être exhaustif, nous donnons maintenant quelques exemples de ce type de modèles.

- Il est un cas extrême d'incertitude, qualifié d'*incertain total*, qui se caractérise par l'absence de toute information sur les événements pouvant se produire et qui se traduit par un traitement symétrique des événements d'une partition. Les critères de choix dans l'incertain total, dans le modèle classique de Arrow et Hurwicz (1972), s'expriment très simplement : ils ne dépendent que des valeurs minimum et maximum des résultats des décisions. Ils ont le défaut d'attribuer, dans certains cas, un effet nul à la dominance c'est-à-dire de juger équivalents deux actes dont l'un aurait un résultat strictement meilleur pour au moins un événement et un résultat aussi bon ailleurs. Cohen et Jaffray (1980) proposent une axiomatique qui remédie à ce problème. La comparaison de deux décisions se fait alors sur la base des valeurs extrêmes des résultats, et, en cas d'indifférence, repose sur une notion de dominance. Sous les axiomes qu'ils imposent la relation d'indifférence peut ne pas être pas transitive³¹.
- Jaffray ((1989a) et (1989b)) construit un modèle de comportement lorsque l'information objective est du type suivant : pour chaque événement on connaît un intervalle dans lequel peut se trouver sa probabilité comprise entre deux valeurs (on parlera de probabilité imprécise dans ce cas)³². Le critère qu'il dérive alors est très général³³. Il utilise à la fois un indice de pessimisme/optimisme et un indice d'aversion pour le risque. Ce modèle admet pour cas particuliers le critère d'espérance d'utilité lorsque l'information est précise, c'est-à-dire lorsqu'on est dans le risque, et le critère

³⁰En particulier, les croyances de deux décideurs différents peuvent être radicalement différentes.

³¹La relation stricte associée, elle, l'est toujours.

³²Ce type d'information peut notamment être générée par l'exploitation d'enquêtes incomplètes ou comprenant des données manquantes.

³³Ghirardato (1994b) retrouve un critère similaire au moyen d'une axiomatique différente. Voir également Hendon, Jacobsen, Sloth, et Tranaes (1994).

d'Arrow et Hurwicz (1972) dans le cas où l'intervalle de probabilité est $[0, 1]$, c'est-à-dire lorsqu'on est dans l'incertain total.

4.5.2 Cohérence dynamique

Nous nous sommes jusqu'à présent concentrés exclusivement sur des modèles de décision statique. Dans un contexte dynamique, une nouvelle information sur l'état de la nature est révélée au cours du temps, et le décideur a alors la possibilité d'ajuster sa décision en fonction de l'information reçue. Le modèle d'espérance d'utilité possède la propriété remarquable de *cohérence dynamique*. Cette propriété peut s'exprimer de la manière suivante : un décideur, placé dans une situation de choix dynamique, élabore des plans sur sa séquence de choix et *se tient à ses plans* au fur et à mesure qu'il reçoit de l'information.

Autrement dit, il réalise ses intentions. On peut démontrer³⁴ que toute violation de l'axiome d'indépendance conduit à une violation de la cohérence dynamique. Lorsque l'on affaiblit l'axiome d'indépendance, les problèmes de cohérence dynamique et les solutions apportées ont fait l'objet de recherches trop nombreuses pour pouvoir être discutées ici. (Voir par exemple McClennen (1988), Machina (1989), Karni et Safra (1990) Karni et Schmeidler (1991a), Epstein et LeBreton (1993), Border et Segal (1994), Vergnaud (1994), Jaffray (1998)).

Ces problèmes sont également liés aux problèmes de valeur de l'information, de révision des croyances et de *Dutch book* (voir par exemple Wakker (1988), Kelsey (1995), Dow et Werlang (1994a), Jaffray (1992), Chassagnon et Vergnaud (1999)).

5 Applications

Les applications économiques des modèles de décision exposés ci-dessus sont trop nombreuses et diverses pour pouvoir être toutes évoquées ici. Sans vouloir être exhaustifs, nous avons cependant cherché à donner suffisamment de références à cette littérature naissante. Dans les exemples choisis, on trouvera aussi bien des résultats qui se révèlent robustes quel que soit le modèle de représentation des préférences adopté, que des résultats qui s'expliquent à l'aide des modèles non additifs et non dans le modèle d'espérance d'utilité

5.1 Notions d'accroissements de risque

Nous avons vu que le modèle d'utilité dépendante du rang avait, entre autre, suscité un intérêt nouveau pour les notions d'accroissements de risque. Une conséquence de cet intérêt a été la démonstration dans des cadres de plus

³⁴Sous des hypothèses de séparabilité (ou conséquentialisme, Hammond (1988) et (1989)) et de réduction des loteries composées.

en plus généraux de résultats que l'on savait valables dans le cadre restrictif de l'espérance d'utilité. Pour illustrer ceci, prenons le cas du contrat d'assurance optimal. Arrow (1965) a démontré dans le modèle d'espérance d'utilité que, pour une prime donnée, le contrat optimal, pour un agent ayant de l'aversion pour le risque, est un contrat de pleine assurance au-delà d'une franchise. Gollier et Schlesinger (1996) ont généralisé ce résultat en montrant que ce résultat demeurerait valable quel que soit le modèle utilisé, lorsque l'agent a de l'aversion forte pour le risque. Allant plus loin encore, Vergnaud (1997) montre qu'une notion plus faible d'aversion pour le risque est en fait suffisante pour obtenir ce résultat.

La réflexion sur les différentes notions d'aversion pour le risque a également permis des avancées dans d'autres domaines de l'analyse économique, comme la mesure des inégalités. En effet, il existe des analogies entre une distribution de probabilité et une distribution de revenus, entre un accroissement de risque et un accroissement des inégalités, et enfin entre une évaluation d'une distribution de probabilité et une fonction de bien-être social. Il est alors clair que tous les modèles généralisant l'espérance d'utilité ont leur pendant en théorie du choix social. Par exemple, les différentes notions d'aversion pour le risque trouvent une contrepartie dans des notions d'aversion pour les inégalités, pouvant différer de l'ordre de Lorenz habituellement considéré. Les contributions de Yaari (1988), Ebert (1988), Ben Porath et Gilboa (1994), Chateauneuf (1996) par exemple sont directement issues de l'étude des modèles généralisant celui d'espérance d'utilité (pour un exposé de cette littérature, voir Gajdos (1999) et Cowell (1998)).

5.2 Prix d'actif

Certains résultats contre-intuitifs du modèle d'espérance d'utilité ont pu être expliqués grâce à l'apport des modèles d'utilité dépendante du rang et d'utilité à la Choquet. Nous exposons ici certains résultats qui ont en commun de reposer sur l'utilisation du "coude" introduit sur la première bissectrice des courbes d'indifférence dans les modèles d'utilité dépendante du rang ou d'utilité à la Choquet (voir le graphique 2). Une première contribution est celle de Dow et Werlang (1992b). Ces auteurs considèrent le problème suivant. Soit un actif X dont le paiement est incertain, et qui peut rapporter un montant élevé \bar{x} dans l'état s_1 ou faible \underline{x} dans l'état s_2 (avec $\bar{x} > \underline{x}$).

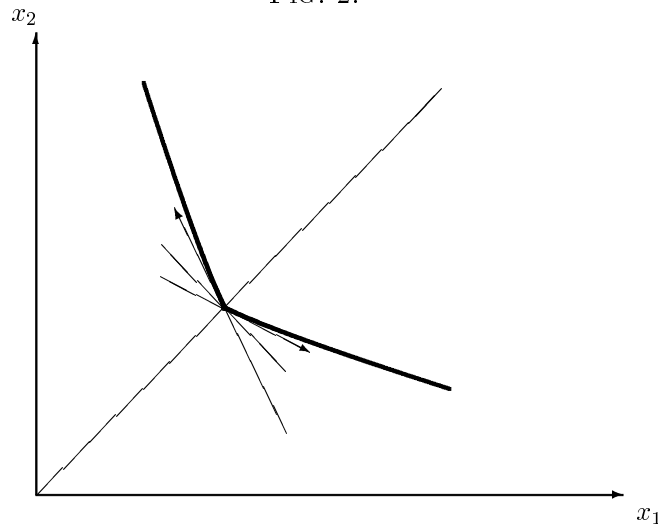
Arrow (1965) a démontré que, dans le modèle d'espérance d'utilité, il n'existe qu'un seul prix auquel un agent décide de ne pas vendre ou acheter cet actif. Dow et Werlang (1992b) pour leur part mettent en cause ce résultat dans le modèle d'utilité à la Choquet, en montrant qu'il existe tout un intervalle de prix tel que l'agent ne désire détenir aucune position dans cet actif, c'est-à-dire ne désire ni l'acheter ni le vendre.

L'intuition d'un tel résultat est simple et repose sur l'inégalité $\int_{Ch} X dv \leq 0 \leq -\int_{Ch} (-X) dv$ (voir remarque 9). Considérons en effet un agent, caractérisé

par une fonction d'utilité dans le certain $u(x) = x$ et une capacité v telle que $v(s_1) + v(s_2) < 1$, et ayant une richesse donnée (non aléatoire) qui envisage d'acheter ou de vendre l'actif incertain X . Quel est le gain espéré à acheter l'actif? Un calcul simple montre que ce gain espéré (au sens de Choquet) est égal à $\underline{x} + v(s_1)(\bar{x} - \underline{x}) = v(s_1)\bar{x} + (1 - v(s_1))\underline{x}$. Vendre l'actif correspond à l'opération acheter l'actif rapportant $-\bar{x}$ dans l'état s_1 et $-\underline{x}$ dans l'état s_2 . En remarquant que $-\bar{x} < -\underline{x}$, le gain espéré d'une telle vente est égal à $-\bar{x} + v(s_2)(-\underline{x} - (-\bar{x})) = -((1 - v(s_2))\bar{x} + v(s_2)\underline{x})$. Ainsi, pour que l'agent souhaite acheter l'actif, son prix doit être inférieur à $\underline{p} = v(s_1)\bar{x} + (1 - v(s_1))\underline{x}$, tandis qu'il ne désire vendre l'actif que si le prix est supérieur à $\bar{p} = (1 - v(s_2))\bar{x} + v(s_2)\underline{x}$. Un calcul simple montre que $\underline{p} < \bar{p}$ dès lors que $v(s_1) + v(s_2) < 1$. Ainsi, le statu quo est préféré à la fois à la vente et à l'achat de l'actif.

Graphiquement, représentons cette situation dans le plan (x_1, x_2) où x_1 est la consommation de l'agent dans l'état s_1 et x_2 celle dans l'état s_2 . La position initiale de l'agent est certaine et se situe donc sur la première bissectrice, en un coude de l'une de ses courbes d'indifférence. Si l'on trace alors la droite budgétaire de cet agent, on voit que le point de dotation initiale est la solution du problème d'optimisation pour tout un intervalle de prix (correspondant aux pentes des droites budgétaires possibles), comme l'illustre le graphique 2. L'intuition derrière ce graphique se retrouve dans une série d'articles qui

FIG. 2:



analysent des modèles de prix d'actifs dans lesquels les agents satisfont aux axiomes du modèle d'utilité dépendante du rang (et ont de l'aversion pour le risque de premier ordre au sens de Segal et Spivak (1990)) ou d'utilité à la Choquet (voir Dow et Werlang (1992a), Dana (1998), Tallon (1997b), Epstein et Wang (1994)). Ces modèles exhibent une indétermination possible des prix d'actifs, et contribuent à expliquer la volatilité excessive du prix des actifs que

l'on observe sur les marchés.

Chateauneuf, Kast, et Lapied (1996) et Kast et Lapied (1995) utilisent l'intégrale de Choquet dans un but d'évaluation du prix d'actifs financiers par arbitrage, cette méthode complétant la méthode d'évaluation linéaire habituelle. Bouyssou et Lefoll (1997) pour leur part retrouvent des conclusions similaires à celle du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) lorsque les agents ont de l'aversion forte pour le risque mais ne se conforment pas nécessairement au modèle d'espérance d'utilité.

L'intuition développée dans le modèle de Dow et Werlang (1992b) aide également à comprendre certains résultats obtenus dans des modèles d'assurance avec des agents dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité dépendante du rang, par exemple que les agents peuvent désirer s'assurer pleinement même si la prime qu'ils doivent payer n'est pas actuarielle (Karni (1992), Doherty et Eeckhoudt (1995), Dupuis et Langlais (1997)).

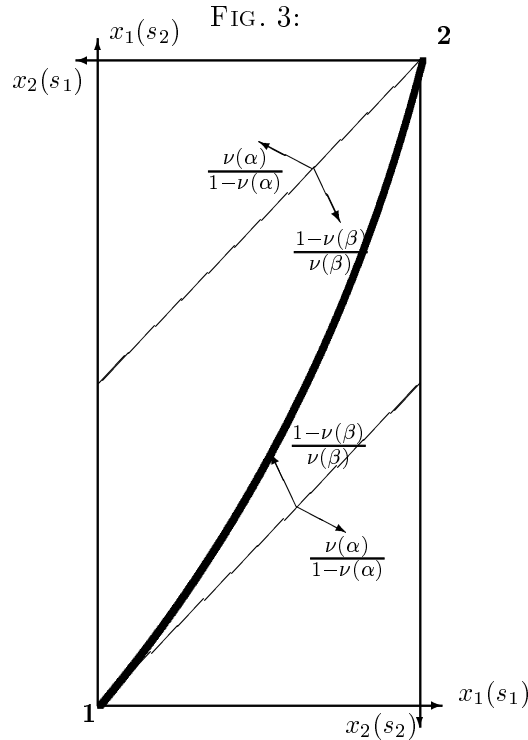
5.3 Partage du risque

Les problèmes de partage du risque ont été étendus à des modèles plus généraux que le modèle d'espérance d'utilité. Le résultat classique de partage du risque lorsque les agents se conforment au modèle de l'espérance d'utilité et sont adversaires du risque, est que les allocations Pareto optimales sont comonotones, vérifiant ainsi un principe de mutualité (voir Borch (1962)).

Dans le risque, Landsberger et Meilijson (1994) généralisent ce résultat et montrent, indépendamment de tout modèle de représentation des préférences, que si tous les agents ont de l'aversion forte pour le risque, alors les allocations Pareto optimales sont comonotones.

Dans un environnement incertain, Chateauneuf, Dana, et Tallon (1997) étudient le partage optimal du risque dans une économie où les agents maximisent une utilité à la Choquet avec une même capacité convexe et montrent que les allocations optimales sont dans ce cas comonotones. Ainsi, le principe de mutualité est également vérifié dans ce type d'économie. Le graphique 3 illustre cette propriété dans un cadre avec deux agents (1 et 2) et deux états de la nature (s_1 et s_2). Sur ce graphique, $x_h(s)$ représente la consommation de l'agent h dans l'état s . La situation représentée est une situation dans laquelle les dotations de bien sont supérieures dans l'état s_2 . La courbe en gras représente l'ensemble des optima de Pareto, tandis que les demi-tangentes représentent les "taux marginaux de substitution" des agents le long de la droite de certitude (c'est-à-dire la première bissectrice, où la consommation dans les deux états est la même).

La courbe des optima de Pareto se situe dans la zone de comonotonie, à savoir la zone dans laquelle les consommations des agents sont ordonnées de la même manière que les dotations agrégées (les agents consomment tous les deux plus dans l'état s_2 où il y a plus de ressources).



Dans un environnement sans risque agrégé (les dotations agrégées sont les mêmes dans tous les états), Tallon (1997a) et (1998b) montre que les allocations Pareto optimales sont les allocations d'assurance parfaite (chaque agent ayant la même consommation dans chaque état) lorsque l'intersection des noyaux des différentes capacités (supposées convexes) des agents est non-vide. Billot, Chateauneuf, Gilboa, et Tallon (1998) se placent dans le modèle *multi-prior* et montrent, dans un cadre similaire (c'est-à-dire sans risque agrégé), que les allocations Pareto optimales sont les allocations de pleine assurance si et seulement si les ensembles de croyances des agents ont une intersection non-vide. Ainsi, l'existence d'une croyance commune est nécessaire et suffisante pour que les agents ne parient pas à l'optimum. En d'autres termes, les situations Pareto optimales sont celles pour lesquelles aucune source d'aléa supplémentaire (tel que des paris) n'est introduite.

Ce résultat généralise ainsi le résultat classique en espérance d'utilité selon lequel les allocations de pleine assurance sont Pareto optimales si et seulement si les agents ont mêmes croyances.

En revanche, Mukerji et Tallon (1999) montrent que le partage du risque à l'équilibre peut être sensiblement modifié selon que les préférences des agents sont représentées par une espérance d'utilité ou par une utilité à la Choquet. Plus précisément, ils développent un modèle dans lequel le partage du risque doit s'opérer par des échanges d'actifs, dont les paiements ont une compo-

sante idiosyncratique, non corrélée au risque réel à partager. Si les croyances des agents sur cette composante idiosyncratique sont représentables par une probabilité, alors un argument usuel de diversification implique que l'équilibre obtenu est Pareto optimal et correspond à l'équilibre de marchés complets. En revanche, s'il existe une ambiguïté sur cette composante et que les agents ont une capacité (strictement) convexe, il peut se trouver que l'équilibre soit caractérisé par une absence totale d'échange d'actifs et donc par un partage du risque sous-optimal.

5.4 Asymétries d'information

Nous considérons maintenant l'application des modèles non additifs en présence d'asymétrie d'information. Ghirardato (1994a) reconsidère ainsi le modèle usuel principal-agent en présence d'aléa moral et montre que l'existence d'une solution n'est pas affectée lorsque les agents se conforment au modèle d'utilité à la Choquet. Il développe ensuite des exercices de statique comparative en faisant varier le "degré de non-additivité" de la capacité.

Mukerji (1998) pour sa part reconsidère le modèle de l'*investment hold up*³⁵ avec aléa moral, lorsque les croyances de l'investisseur sont non additives. Il montre que, contrairement au résultat obtenu en espérance d'utilité, où un contrat incomplet n'est jamais optimal, l'aversion pour l'ambiguïté peut justifier que le contrat passé entre l'investisseur et l'entrepreneur soit un contrat incomplet.

Le modèle d'utilité dépendante du rang, en mettant l'accent sur le fait que les agents peuvent transformer une loi de probabilité objective de manière différente a également conduit certains auteurs à réévaluer les résultats standards du partage de risque en présence d'anti-sélection ou d'aléa moral. En effet, ces résultats sont obtenus dans le cas où à la fois l'agent et le principal se conforment au modèle d'espérance d'utilité et ont des croyances identiques. Jeleva et Villeneuve (1996), Langlais (1998) justifient l'étude de modèles d'anti-sélection dans lesquels les agents n'ont pas les mêmes croyances précisément par des fonctions de transformation de probabilité différentes (voir Schmidt (1998) pour le cas du risque moral). Les résultats obtenus, à la fois quant à la forme du contrat optimal et quant au type d'équilibre (mélangeant ou non), diffèrent sensiblement du cas usuel.

De manière plus abstraite, Halevy (1998) et Ma (1998) étudient la robustesse du *no-trade theorem*, démontré par Milgrom et Stokey (1982) dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité, lorsque cette dernière hypothèse est levée. Dans une économie d'échange dans laquelle l'information est asymétrique, ce théorème établit le principe suivant. Soit une allocation initiale, ex-ante Pareto optimale. Imaginons que les agents reçoivent, de manière individuelle, une information privée (un signal) sur l'état du monde réalisé. Alors, si la structure du modèle et la rationalité des agents sont connaissance commune, l'allocation

³⁵Voir par exemple Tirole (1988).

initiale reste *interim* Pareto optimale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'échanges mutuellement bénéfiques pour tous les agents, une fois l'information révélée. Halevy (1998) et Ma (1998) ont montré que le principe de la chose sûre n'était pas nécessaire pour démontrer ce théorème dans un cadre plus général, mais que, en revanche, la cohérence dynamique est essentielle.

Enfin, dans un modèle d'équilibre général avec information asymétrique, Tallon (1998a) montre à l'aide d'un exemple que la révélation de l'information privée par le système de prix d'équilibre ne conduit pas nécessairement les agents, (lorsqu'ils ne sont pas maximisateurs d'une espérance d'utilité) à ignorer leur source d'information privée, si celle-ci leur semble plus fiable que le mécanisme de prix.

5.5 Théorie des jeux

Le dernier domaine que nous abordons ici est la théorie des jeux. Le point de départ est qu'à un équilibre de Nash (en stratégies pures ou mixtes), un joueur peut avoir de l'ambiguïté, c'est-à-dire ne pas être "certain" des probabilités avec lesquelles ses opposants jouent les différentes stratégies. L'incertitude est ici générée de manière endogène.

Dow et Werlang (1994b), Eichberger et Kelsey (1998), Lo (1996), Marinacci (1996), Klibanoff (1996) ont développé des concepts d'équilibre de Nash dans des modèles où les joueurs manifestent une certaine aversion pour l'incertitude, et ont des croyances sur les stratégies des opposants représentées par des capacités plutôt que par des probabilités (voir également Crawford (1990)).

Dow et Werlang (1994b) proposent l'exemple suivant, à deux joueurs :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	(10, 10)	$(-100, 10 - \delta)$
	B	$(10 - \varepsilon, 10)$	$(10 - \varepsilon, 10 - \delta)$

Le seul équilibre de Nash (et le seul équilibre rationalisable) de ce jeu est (H, G) . Toutefois, est-il plausible que 1 joue H , sachant qu'il encourt une perte de 100 si 2 joue D ? Le concept d'équilibre proposé par Dow et Werlang permet de "rationaliser" le fait que le joueur 1 préfère jouer B dans ce jeu (surtout si ε est faible), puisque le choix de la stratégie B ne comporte aucun risque. Pour illustrer ceci, recherchons un équilibre dans lequel le joueur 1 a les croyances sur les actions du joueur 2 de la forme suivante : il met un poids $v(D) = 0$ sur le fait que 2 joue D et un poids $v(G) < 1$ sur le fait que 2 joue G . Ceci n'est bien évidemment possible que si 1 a des croyances non additives sur la stratégie jouée par 2. Le paiement espéré de H pour le joueur 1 est donné par l'intégrale de Choquet des paiements, par rapport à la capacité v soit (voir l'exemple 1) $-100.(1 - v(G)) + 10.v(G)$. Le paiement espéré de la stratégie B

est $10 - \varepsilon$. Ainsi, si $10.v(G) - 100.(1 - v(G)) < 10 - \varepsilon$, l'équilibre de Nash avec croyances non additives est (B, G) (c'est-à-dire $v(G) \leq (110 - \varepsilon)/110$).

Dow et Werlang (1994b) montrent également, qu'avec leur concept, il est possible de briser le raisonnement par récurrence arrière (qui s'avère parfois problématique, comme dans le jeu du mille-pattes). Ghirardato et Le Breton (1996) étendent le concept d'équilibre rationalisable au cas de joueurs "à la Choquet". Mukerji (1995) développe des notions similaires, tandis que Mukerji et Shin (1996) s'interrogent sur la notion de connaissance commune dans ce type de jeux.

Eichberger et Kelsey (1997) passent en revue, de manière très pédagogique, de nombreuses applications simples de jeux dans lesquels les joueurs ont des croyances non additives. Ils montrent, entre autre, que les notions de substituabilité ou de complémentarité stratégiques, qui s'avèrent être d'une grande importance en macroéconomie notamment, se généralisent aisément dans ce cadre.

Lo (1998) pour sa part étudie un problème d'enchères dans un modèle *multi-prior*. Il montre en particulier que, dans certains cas de figure, l'enchère au premier prix domine au sens de Pareto l'enchère au second prix, généralisant dans l'incertain certains des résultats de Karni et Safra (1989) dans le risque (voir également Salo et Weber (1995)).

Enfin, certaines applications aux modèles axiomatiques de négociations, dans un cadre de théorie des jeux coopératifs, ont vu le jour récemment (Rubinstein, Safra, et Thomson (1992) et Grant et Kajii (1995)). Koskiewicz (1999), par exemple, montre que lorsque les préférences des agents sont de type espérance d'utilité dépendante du rang, le pouvoir de négociation de chaque agent, dans un problème de Nash a priori symétrique, dépend de la forme précise de la fonction de transformation des probabilités.

6 Remarques finales

Nous avons cherché dans cet article à donner au lecteur certains outils, sans rechercher l'exhaustivité, pour aborder la littérature, très vaste, sur la modélisation du choix dans un environnement incertain et les applications économiques de ces modèles. Ce champ de recherche est très actif et, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, certains problèmes théoriques restent ouverts (mesure de l'aversion pour l'ambiguïté, cohérence dynamique et valeur de l'information,...). Les applications de ces modèles de décision dans l'incertain sont également très récentes, et de nombreux champs d'application (choix social, mesure des inégalités, explications de l'existence de certaines institutions ou encore de certains types de contrats,...) sont ouverts et font l'objet de recherches actuelles. Nous espérons avec cette revue de la littérature avoir convaincu le lecteur du caractère fructueux de cette recherche.

Références

- ABDELLAOUI, M. (1995) : “Comportements individuels devant le risque et transformation des probabilités,” *Revue d’Economie Politique*, 105(1), 157–178.
- ABDELLAOUI, M., ET B. MUNIER (1998) : “The risk-structure dependence effect : experimenting with an eye to decision-aiding,” *Annals of Operations Research*, 80, 237–252.
- ALLAIS, M. (1953) : “Le comportement de l’homme rationnel devant le risque : critique des postulats de l’école américaine,” *Econometrica*, 21, 503–546.
- (1988) : “The general theory of random choices in relation to the invariant cardinal utility function and the specific probability function,” in *Risk, decision and rationality*, éd. par B. Munier, pp. 233–289. Reidel, Dordrecht.
- ANSCOMBE, F., ET R. AUMANN (1963) : “A definition of subjective probability,” *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 199–205.
- ARROW, K. (1965) : “The theory of risk aversion,” in *Aspects of the theory of risk bearing*. Yrjo J. Saatio, Helsinki.
- ARROW, K., ET L. HURWICZ (1972) : “An optimality criterion for decision making under ignorance,” in *Uncertainty and Expectations in Economics*, éd. par C. Carter, et J. Ford, pp. 1–11. B. Blackwell.
- BEN PORATH, E., ET I. GILBOA (1994) : “Linear measures, the Gini index and the income-equality trade-off,” *Journal of Economic Theory*, 64, 443–467.
- BILLOT, A., A. CHATEAUNEUF, I. GILBOA, ET J.-M. TALLON (1998) : “Sharing beliefs : between agreeing and disagreeing,” Cahiers Eco&Maths 98.30, Université Paris I, A paraître *Econometrica*.
- BORCH, K. (1962) : “Equilibrium in a reinsurance market,” *Econometrica*, 30, 424–444.
- BORDER, K., ET U. SEGAL (1994) : “Dynamic consistency implies approximately expected utility preferences,” *Journal of Economic Theory*, 63, 170–188.
- BOUYSSOU, D., ET J. LEFOLL (1997) : “MEDAF et nouveaux modèles de décision dans le risque,” *Finance*, 18(1), 2–25.
- CHASSAGNON, A., ET J.-C. VERGNAUD (1999) : “A positive value of information for a non-bayesian decision-maker,” in *Beliefs, interaction, and preferences*, éd. par M. Machina, et B. Munier. Kluwer.
- CHATEAUNEUF, A. (1991) : “On the use of capacities in modeling uncertainty aversion and risk aversion,” *Journal of Mathematical Economics*, 20, 343–369.
- (1994) : “Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral,” *Annals of Operations Research*, 52, 3–20.

- (1996) : “Decreasing inequalities : an approach through non-additive models,” *Cahiers Eco&Maths* 96-58, Université Paris I.
- (1999) : “Comonotonicity axioms and RDEU theory for arbitrary consequences,” *Journal of Mathematical Economics*, 32(1), 21–45.
- CHATEAUNEUF, A., ET M. COHEN (1994) : “Risk seeking with diminishing marginal utility in a non-expected utility model,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 9, 77–91.
- CHATEAUNEUF, A., M. COHEN, ET R. KAST (1997) : “A review of some results related to comonotonicity,” *Cahiers Eco & Maths* 97.32, Université Paris I.
- CHATEAUNEUF, A., M. COHEN, ET I. MEILIJSON (1997a) : “More pessimism than greediness : a characterization of monotone risk aversion in the Rank Dependent Expected Utility model,” *Cahiers Eco&Maths* 97-53, Université Paris I.
- (1997b) : “New tools to better model behavior under risk and uncertainty : an overview,” *Finance*, 18(1), 25–46.
- CHATEAUNEUF, A., R. DANA, ET J.-M. TALLON (1997) : “Optimal risk-sharing rules and equilibria with Choquet expected utility,” *Cahiers Eco-Maths* 97-54, Université Paris I, A paraître dans le *Journal of Mathematical Economics*.
- CHATEAUNEUF, A., R. KAST, ET A. LAPIED (1996) : “Choquet pricing in financial markets with frictions,” *Mathematical finance*, 6(3), 323–330.
- CHATEAUNEUF, A., ET J.-M. TALLON (1998) : “Diversification, convex preferences and non-empty core,” *Cahiers Eco&Maths* 98-32, Université Paris I.
- CHEW, S., E. KARNI, ET Z. SAFRA (1987) : “Risk aversion in the theory of expected utility with rank dependent preferences,” *Journal of Economic Theory*, 42, 370–381.
- CHEW, S., ET P. WAKKER (1996) : “The comonotonic sure-thing principle,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 12, 5–27.
- CHOQUET, G. (1954) : “Théorie des capacités,” *Annales de l’Institut Fourier*, V, 131–295.
- COHEN, M. (1995) : “Risk-aversion concepts in expected- and non-expected-utility models,” *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 20, 73–91.
- COHEN, M., ET J.-Y. JAFFRAY (1980) : “Rational behavior under complete ignorance,” *Econometrica*, 48(5), 1281–1299.
- (1988) : “Certainty Effect vs Probability Distortion : An Experimental Analysis of Decision Making under Risk,” *Journal of Experimental Psychology*, 14(4), 554–560.

- COHEN, M., J.-Y. JAFFRAY, ET T. SAID (1987) : “Experimental comparison of individual behavior under risk and under uncertainty for gains and for losses,” *Organizational behavior and human decision process*, 39, 1–22.
- COURTAULT, J.-M., ET J.-P. GAYANT (1999) : “Disponibilité à payer et disponibilité à recevoir d’un teneur de marché,” Cahiers de recherche 99-02, GAINS-Université du Maine.
- COWELL, F. (1998) : “Measurement of inequality,” Discussion paper, LSE, A paraître dans *Handbook of Income Distribution*.
- CRAWFORD, V. (1990) : “Equilibrium without independence,” *Journal of Economic Theory*, 50, 127–154.
- DANA, R. (1998) : “Pricing rules when agents have non-additive expected utility and homogeneous expectations,” Discussion paper, Cahier du Ceremade, Université Paris IX.
- DEBREU, G. (1954) : “Representation of a preference ordering by a numerical function,” in *Decision Processes*, éd. par R. Thrall, C. Coombs, et R. Davis, pp. 159–165. Wiley, New York.
- (1959) : *Theory of value*. Wiley, New York.
- DEKEL, E. (1989) : “Asset demands without the independence axiom,” *Econometrica*, 57, 163–169.
- DOHERTY, N., ET L. EECKHOUDT (1995) : “Optimal insurance without expected utility : the dual theory and the linearity of insurance contracts,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 10, 157–179.
- DOW, J., ET S. WERLANG (1992a) : “Excess volatility of stock prices and Knightian uncertainty,” *European Economic Review*, 36, 631–638.
- (1992b) : “Uncertainty aversion, risk aversion, and the optimal choice of portfolio,” *Econometrica*, 60(1), 197–204.
- (1994a) : “Learning under Knightian uncertainty : the law of large numbers for non-additive probabilities,” mimeo, London School of Business.
- (1994b) : “Nash equilibrium under Knightian uncertainty : breaking down backward induction,” *Journal of Economic Theory*, 64(2), 305–324.
- DUPUIS, A., ET E. LANGLAIS (1997) : “The basic analytics of insurance demand and the rank-dependent expected utility model,” *Finance*, 18(1), 47–76.
- EBERT, U. (1988) : “Measurement of inequality : an attempt at unification and generalization,” *Social Choice and Welfare*, 5, 147–169.
- EECKHOUDT, L., ET C. GOLLIER (1992) : *Le partage des risques*. Ediscience international.
- EICHBERGER, J., ET D. KELSEY (1996) : “Uncertainty aversion and preference for randomisation,” *Journal of Economic Theory*, 71(1), 31–43.

- (1997) : “Uncertainty and strategic interaction in economics,” Discussion paper, Universitat des Saarlandes.
- (1998) : “Non-additive beliefs and game theory,” *Games and Economic Behavior*, Forthcoming.
- ELLSBERG, D. (1961) : “Risk, ambiguity, and the Savage axioms,” *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643–669.
- EPSTEIN, L., ET M. LEBRETON (1993) : “Dynamically consistent beliefs must be Bayesian,” *Journal of Economic Theory*, 61(1), 1–22.
- EPSTEIN, L., ET T. WANG (1994) : “Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty,” *Econometrica*, 62(3), 283–322.
- EPSTEIN, L., ET J. ZHANG (1998) : “Subjective probabilities on subjectively unambiguous events,” Mimeo.
- FISHBURN, P. (1970) : *Utility theory for decision making*. Wiley.
- (1982) : *The foundations of expected utility*. Reidel.
- (1988) : *Nonlinear preferences and utility theory*. The Johns Hopkins University Press.
- (1993) : “The axioms and algebra of ambiguity,” *Theory and Decision*, 34, 119–137.
- GAJDOS, T. (1999) : “Les fondements axiomatiques de la mesure des inégalités,” mimeo, EUREQua-Université Paris I.
- GAYANT, J.-P. (1998) : “Arguments graphiques simples pour comprendre la spécification du modèle d’espérance d’utilité et l’intégrale de Choquet,” *Actualité Economique*, 74(2), 183–195.
- GHIRARDATO, P. (1994a) : “Agency theory with non-additive uncertainty,” mimeo.
- (1994b) : “Coping with ignorance : unforeseen contingencies and non-additive uncertainty,” Discussion paper, University of California at Berkeley.
- GHIRARDATO, P., ET M. LE BRETON (1996) : “Choquet rationalizability,” mimeo.
- GHIRARDATO, P., ET M. MARINACCI (1997) : “Ambiguity aversion made precise : a comparative foundation and some implications,” Social science working paper. 1026, CalTech.
- GILBOA, I. (1987) : “Expected utility with purely subjective non-additive probabilities,” *Journal of Mathematical Economics*, 16, 65–88.
- GILBOA, I., ET D. SCHMEIDLER (1989) : “Maxmin expected utility with a non-unique prior,” *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141–153.
- GOLLIER, C., ET H. SCHLESINGER (1996) : “Arrow’s theorem on the optimality of deductibles : a stochastic dominance approach,” *Economic Theory*, 7(2), 359–364.

- GRANDMONT, J.-M. (1972) : “Continuity properties of a von-Neumann Morgenstern utility,” *Journal of Economic Theory*, 4, 45–57.
- GRANT, S., ET A. KAJII (1995) : “A cardinal characterization of the Rubinstein-Safra-Thomson axiomatic bargaining theory,” *Econometrica*, 63, 1241–1249.
- HALEVY, Y. (1998) : “Trade between rational agents as a result of asymmetric information,” Working paper 98-03, CARESS, University of Pennsylvania.
- HAMMOND, P. (1988) : “Consequentialist foundations for expected utility,” *Theory and Decision*, 25, 25–78.
- (1989) : “Consistent plans, consequentialism, and expected utility,” *Econometrica*, 57(6), 1445–1449.
- HARLESS, D., ET C. CAMERER (1994) : “The predictive utility of generalized expected utility theories,” *Econometrica*, 62, 1251–1290.
- HENDON, E., H. JACOBSEN, B. SLOTH, ET T. TRANAES (1994) : “Expected utility with lower probabilities,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 8, 197–216.
- HEY, J., ET C. ORME (1994) : “Investigating Generalizations of Expected Utility Theory using Experimental Data,” *Econometrica*, 62, 1251–1289.
- INGERSOLL, J. (1987) : *Theory of financial decision making*. Rowman and Littlefield, Totowa, N.J.
- JAFFRAY, J.-Y. (1989a) : “Généralisation du critère de l’utilité espérée aux choix dans l’incertain régulier,” *Recherche Opérationnelle*, 23, 237–267.
- (1989b) : “Linear utility for belief functions,” *Operations Research Letters*, 8, 107–112.
- (1992) : “Bayesian updating and belief functions,” *IEEE trans. on systems, man and cybernetics*, 22(5), 1144–1152.
- (1998) : “Implementing resolute choice under uncertainty,” in *Uncertainty in AI : Proceedings of the 14th Conference*. A paraître.
- JAFFRAY, J.-Y., ET F. PHILIPPE (1997) : “On the existence of subjective upper and lower probabilities,” *Mathematics of Operations Research*, 22, 165–185.
- JELEVA, M., ET B. VILLENEUVE (1996) : “Insurance contracts with imprecise probabilities and adverse selection,” mimeo, CEME & CREST.
- JENSEN, N. (1967) : “An introduction to Bernoullian utility theory : (I) Utility functions,” *Swedish Journal of Economics*, 69, 163–183.
- KAHNEMAN, D., ET A. TVERSKY (1979) : “Prospect theory : an analysis of decision under risk,” *Econometrica*, 47, 263–291.
- KARNI, E. (1992) : “Optimal insurance : a non-expected utility analysis,” in *Contributions to insurance economics*, éd. par G. Dionne. Kluwer Academic Publishers.

- (1996) : “Probabilities and beliefs,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 13, 249–262.
- KARNI, E., ET Z. SAFRA (1989) : “Dynamic consistency, revelations in auctions and the structure of preferences,” *Review of Economic Studies*, 56, 21–434.
- (1990) : “Behaviorally consistent optimal stopping rules,” *Journal of Economic Theory*, 51, 391–402.
- KARNI, E., ET D. SCHMEIDLER (1991a) : “Atemporal dynamic consistency and expected utility theory,” *Journal of Economic Theory*, 54, 401–408.
- (1991b) : “Utility theory with uncertainty,” in *Handbook of Mathematical Economics*, éd. par W. Hildenbrand, et H. Sonnenschein, vol. IV, chap. 33, pp. 1763–1831. North-Holland.
- KAST, R., ET A. LAPIED (1995) : “Probabilité individuelle et probabilité de marché,” *Revue d’Economie Politique*, 1, 71–90.
- KELSEY, D. (1995) : “Dutch book arguments and learning in a nonexpected utility framework,” *International Economic Review*, 36(1), 187–206.
- KEYNES, J.-M. (1921) : *A treatise on probability*. London : McMillan.
- KLIBANOFF, P. (1996) : “Uncertainty, decision, and normal form games,” mimeo, Northwestern University.
- (1998) : “Stochastic independence and uncertainty aversion,” DP 1212, Northwestern University.
- KNIGHT, F. (1921) : *Risk, uncertainty and profit*. Houghton Mifflin.
- KOSKIEVIC, J.-M. (1999) : “Négociations et espérance d’utilité dépendante du rang,” *Annales d’économie et de statistique*, 54, A paraître.
- KREPS, D. (1988) : *Notes on the theory of choice*, Underground classics in economics. Westview Press.
- LANDSBERGER, M., ET I. MEILIJON (1994) : “Co-monotone allocations, Bickel-Lehmann dispersion and the Arrow-Pratt measure of risk aversion,” *Annals of Operations Research*, 52, 97–106.
- LANGLAIS, E. (1996) : “Orders of weak aversion to risk in non-expected utility models, with applications,” mimeo.
- (1998) : “Les effets d’antisélection lorsque le principal et les agents ont des croyances différentes : une analyse dans le cas du marché du crédit,” mimeo, L.E.O.-Université d’Orléans.
- LO, K. (1996) : “Equilibrium in beliefs under uncertainty,” *Journal of Economic Theory*, 71(2), 443–484.
- (1998) : “Sealed bid auctions with uncertainty averse bidders,” *Economic Theory*, 12(1), 1–20.
- MA, C. (1998) : “A no-trade theorem under Knightian uncertainty with general preferences,” mimeo, McGill University.

- MACHINA, M. (1982a) : “Expected utility analysis without the independence axiom,” *Econometrica*, 50, 277–323.
- (1982b) : “A stronger characterization of declining risk aversion,” *Econometrica*, 50(4), 1069–1079.
- (1987) : “Choice under uncertainty : Problems solved and unsolved,” *Journal of Economic Perspectives*, 1(1), 121–154.
- (1989) : “Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty,” *Journal of Economic Literature*, 28, 1622–1668.
- MACHINA, M., ET D. SCHMEIDLER (1992) : “A more robust definition of subjective probability,” *Econometrica*, 60, 745–780.
- MARINACCI, M. (1996) : “Ambiguous games,” mimeo, Northwestern University.
- MCCLENNEN, E. (1988) : “Dynamic choice and rationality,” in *Risk, Decision, and Rationality*, éd. par B. Munier, pp. 517–536.
- MCCORD, M., ET R. DE NEUFVILLE (1984) : “Utility dependence on probability : an empirical demonstration,” *Journal of Large Scale Systems*, 6, 91–103.
- MEYER, J. (1987) : “Two-moment decision models and E.U maximization,” *American Economic Review*, 77, 421–436.
- MILGROM, P., ET N. STOKEY (1982) : “Information, trade and common knowledge,” *Journal of Economic Theory*, 26, 17–27.
- MONTESANO, A., ET F. GIOVANNONI (1996) : “Uncertainty aversion and aversion to increasing uncertainty,” *Theory and Decision*, 41, 133–148.
- MOSSIN, J. (1968) : “Aspects of rational insurance purchasing,” *Journal of Political Economy*, 76, 553–568.
- MUKERJI, S. (1995) : “A theory of play for games in strategic form when rationality is not common knowledge,” Discussion paper 9519, University of Southampton.
- (1998) : “Ambiguity aversion and incompleteness of contractual forms,” *American Economic Review*, 88, 1207–1231.
- MUKERJI, S., ET H. SHIN (1996) : “Is common knowledge possible in games with Knightian uncertainty,” Discussion paper 9642, University of Southampton.
- MUKERJI, S., ET J.-M. TALLON (1999) : “Ambiguity aversion and incompleteness of financial markets,” Cahiers de la MSE 1999.28, Université Paris I.
- PRATT, J. (1964) : “Risk aversion in the small and in the large,” *Econometrica*, 32, 122–136.
- PRELEC, D. (1998) : “The probability weighting function,” *Econometrica*, 66(3), 497–527.

- QUIGGIN, J. (1982) : "A theory of anticipated utility," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 323–343.
- (1992) : "Increasing risk : another definition," in *Progress in decision, utility and risk theory*, éd. par A. Chikrii. Kluwer, Dordrecht.
- ROELL, A. (1987) : "Risk aversion in Quiggin and Yaari's model of choice under uncertainty," *Economic Journal*, 97, 143–159.
- ROSS, S. (1981) : "Some stronger measures of risk aversion in the small and in the large with applications," *Econometrica*, 49(3), 621–638.
- ROTHSCHILD, M., ET J. STIGLITZ (1970) : "Increasing risk I : a definition," *Journal of Economic Theory*, 2, 225–243.
- (1971) : "Increasing risk II : its economic consequences," *Journal of Economic Theory*, 3, 66–84.
- RUBINSTEIN, A., Z. SAFRA, ET W. THOMSON (1992) : "On the interpretation of the Nash bargaining solution and its extension to non-expected utility preferences," *Econometrica*, 60, 1171–1186.
- SAFRA, Z., ET I. ZILCHA (1988) : "Efficient sets with and without the expected utility hypothesis," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 369–384.
- SALO, A., ET M. WEBER (1995) : "Ambiguity aversion in first price sealed-bid auctions," *Journal of Risk and Uncertainty*, 11, 123–137.
- SARIN, R., ET P. WAKKER (1992) : "A simple axiomatization of nonadditive expected utility," *Econometrica*, 60(6), 1255–1272.
- SAVAGE, L. (1954) : *The foundations of statistics*. New-York, John Wiley.
- SCHMEIDLER, D. (1986) : "Integral representation without additivity," *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97(2), 255–261.
- (1989) : "Subjective probability and expected utility without additivity," *Econometrica*, 57(3), 571–587.
- SCHMIDT, U. (1998) : "Moral hazard and first-order risk aversion," *Journal of Economics*, A paraître.
- SEGAL, U. (1987) : "Anticipated utility : a measure representation approach," *Annals of Operations Research*, 19, 359–374.
- SEGAL, U., ET A. SPIVAK (1990) : "First order versus second order risk aversion," *Journal of Economic Theory*, 51, 111–125.
- TALLON, J.-M. (1997a) : "Risque microéconomique, aversion à l'incertitude et indétermination de l'équilibre," *Annales d'Economie et de Statistique*, 48, 211–226.
- (1997b) : "Risque microéconomique et prix d'actifs dans un modèle d'équilibre général avec espérance d'utilité dépendante du rang," *Finance*, 18, 140–153.

- (1998a) : “Asymmetric information, nonadditive expected utility and the information revealed by prices : an example,” *International Economic Review*, 39(2), 329–342.
- (1998b) : “Do sunspots matter when agents are Choquet-expected-utility maximizers ?,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 357–368.
- TIROLE, J. (1988) : *The theory of industrial organization*. MIT Press.
- VERGNAUD, J.-C. (1994) : *Essais sur la théorie du choix dans l'incertain*. Thèse de doctorat. Paris X-Dauphine.
- (1997) : “Analysis of risk in a non-expected utility framework and application to the optimality of the deductible,” *Finance*, 18, 155–167.
- VON NEUMANN, J., ET O. MORGENTERN (1947) : *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.
- WAKKER, P. (1988) : “Nonexpected utility as aversion to information,” *Journal of Behavioral Decision Making*, 1, 169–175.
- (1990a) : “Characterizing optimism and pessimism directly through comonotonicity,” *Journal of Economic Theory*, 52, 453–463.
- (1990b) : “Under stochastic dominance, Choquet-expected utility and anticipated utility are identical,” *Theory and Decision*, 29, 119–132.
- (1994) : “Separating marginal utility and risk aversion,” *Theory and Decision*, 36, 1–44.
- WAKKER, P., ET D. DENEFFE (1996) : “Eliciting von Neumann-Morgenstern utilities when Probabilities are Distorted or Unknown,” *Management Science*, 42, 1131–1150.
- WU, G., ET R. GONZALEZ (1996) : “Curvature of the Probability Weighting Function,” *Management Science*, 42, 1676–1690.
- YAARI, M. (1984) : “Risk aversion without diminishing marginal utility,” Discussion paper, International Centre for Economics, Londres.
- (1987) : “The dual theory of choice under risk,” *Econometrica*, 55(1), 95–115.
- (1988) : “A controversial proposal concerning inequality measurement,” *Journal of Economic Theory*, 44, 381–97.